

Dobbeltspændte plader

Generel pladeteori

Per Goltermann

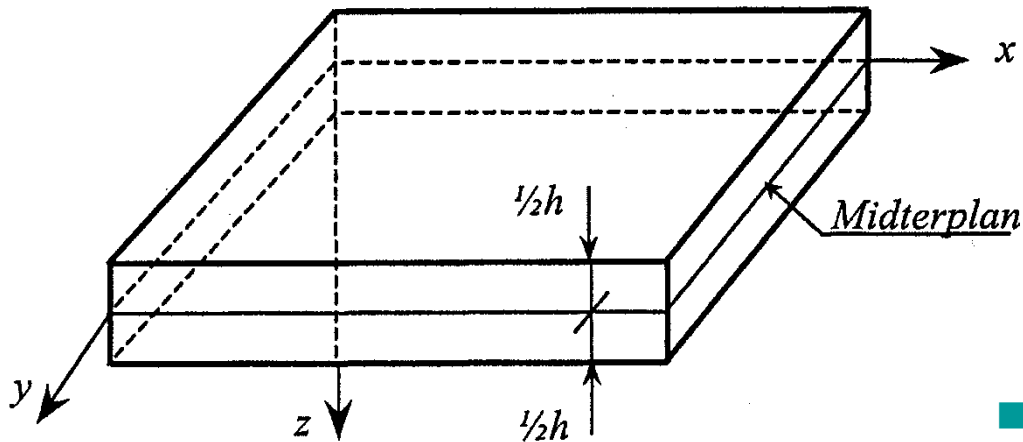
Lektionens indhold (Generel pladeteori)

1. Generelt
2. Tøjninger
3. Snitkræfter og spændinger
4. Ligevægtsligning
5. Kirschhoff's randbetingelser

1. Generelt

- Der er et HELT kursus som gennemgår og bruger den generelle pladeteori, nemlig 11345 "Bygningskonstruktioners modellering: plader, skiver og skaller"
- I det følgende gennemgås pladeteorien KORT – men tilstrækkelig til at vi kan bruge den – og specielt til at vi kan forstå de forenkledte teorier.

Plader - definitioner



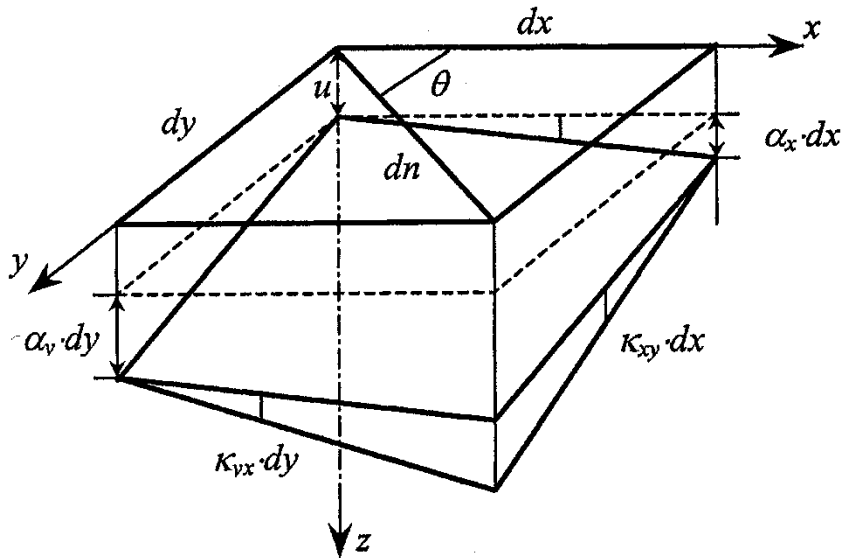
- En plade har en konstant tykkelse h , som er meget mindre end bredden og længden.
- Plader er kun udsat for ren bøjning – ingen kræfter i planen
- Enkeltspændte plader er bjælker i ren bøjning

Pladeteoriens antagelser

- Pladen antages at have konstant tykkelse h .
- Pladen antages at være tynd, så $h \ll l$, hvor l angiver pladens udstrækning.
- I midterplanen er tøjningerne nul, hvorfor midterplanen ikke deformeres i sin egen plan. Midterplanen bøjer kun ud vinkelret på sin egen plan, dvs. i z -aksens retning.
- Tøjningerne vinkelret på midterplanen er nul, hvorfor alle punkter på en normal til midterplanen har samme udbøjning.
- Normaler til midterplanen forbliver rette, og de forbliver også normaler til den deformerede midterplan.
- Pladens udbøjninger u antages at være "små", dvs. $u \ll h$, hvilket fx vil sige af størrelsesordenen $u < l/250$, hvor l er pladens mindste udstrækning

Bemærk: $l/250$ er den nedbøjning, der anvendes i praksis for at sikre imod for store nedbøjninger – pladeteorien kan acceptere større nedbøjninger

2. Tøjninger (generaliserede)



Pladens krumninger bestemmes som

$$\kappa_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Pladens vridning bestemmes som

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Deformationerne i x og y styres af nedbøiningen u. dvs.

$$u_x = -z \alpha_x = -z \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_y = -z \alpha_y = -z \frac{\partial u}{\partial y}$$

....altså som ved bjælker
– undtagen vridningen.

Tøjninger

Ud fra de generaliserede tøjninger (krumning og vridning) kan vi beregne tøjningerne:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z \kappa_x$$

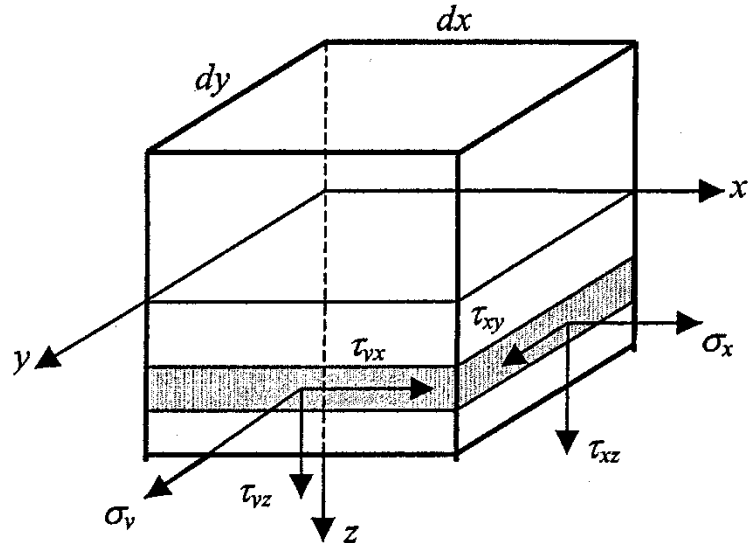
$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z \kappa_y$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2z \kappa_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha_x + \alpha_x = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha_y + \alpha_y = 0$$



Tøjningerne kan omregnes til spændinger vha. materialernes arbejdskurver (lineære/ulineære, urevnet, revnet tværsnit osv.) – men det tager vi lidt senere

3. Spændinger og snitkræfter

Kræfterne (n_x, n_y, n_{xy}) i pladens plan er 0:

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = 0 \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = 0$$

$$n_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz = 0$$

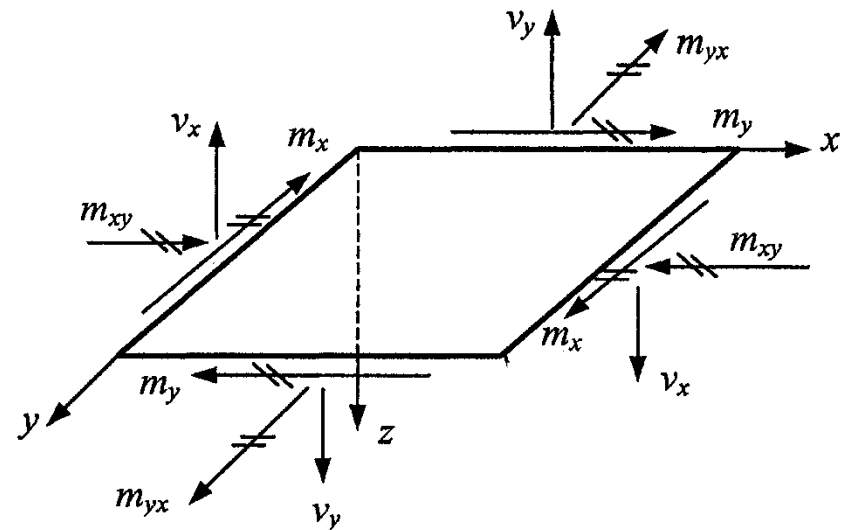
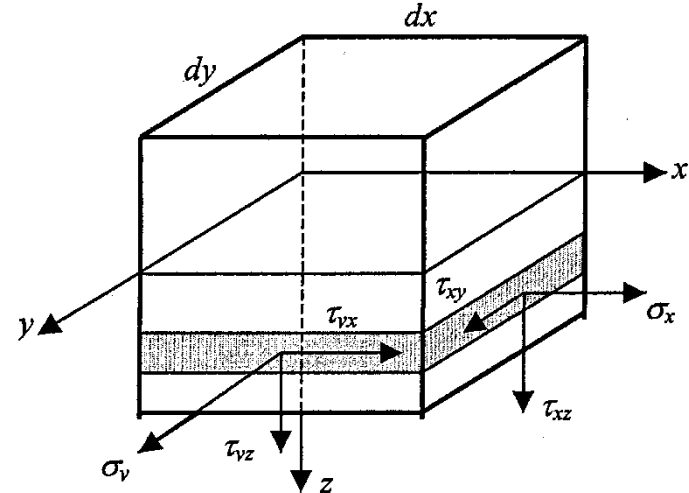
Forskydende kræfter pr længde (v_x, v_y):

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

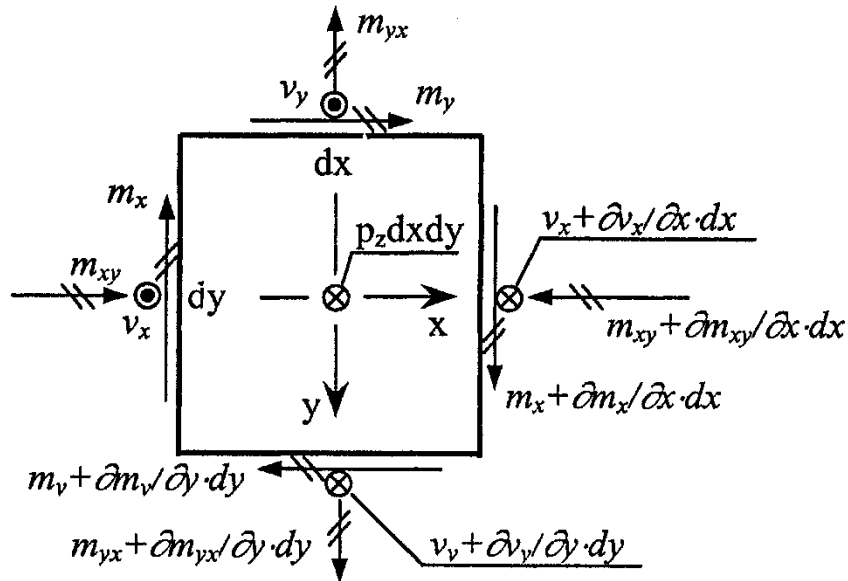
Momenterne pr længde (m_x, m_y, m_{xy}):

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = m_{yx}$$



4. Ligevægtsligning



Lodret ligevægt:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p_z = 0$$

Moment ligevægt om x og y-akser:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x$$

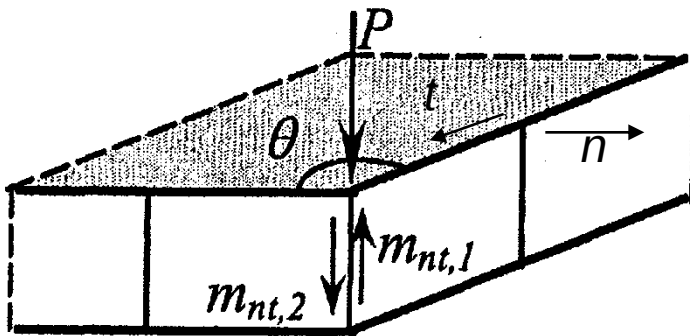
$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = v_y$$

Ved indsættelse i den lodrette
ligevægt findes pladens
ligevægtsligning:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_z = 0$$

5. Kirschhoffs randbetingelser (hjørner)

Som følge af vridningen optræder der koncentrerede reaktioner P ved hjørnerne:



P vil ofte ende med at være en NEDadrettet reaktion, dvs. pladens hjørne skal forankres og holdes NEDE for ikke at bøje op.

Ved en kontinuert randkurve er randbetingelserne

$$m_n = m_i$$

$$v_n + \frac{\partial m_{nt}}{\partial s} = r_i$$

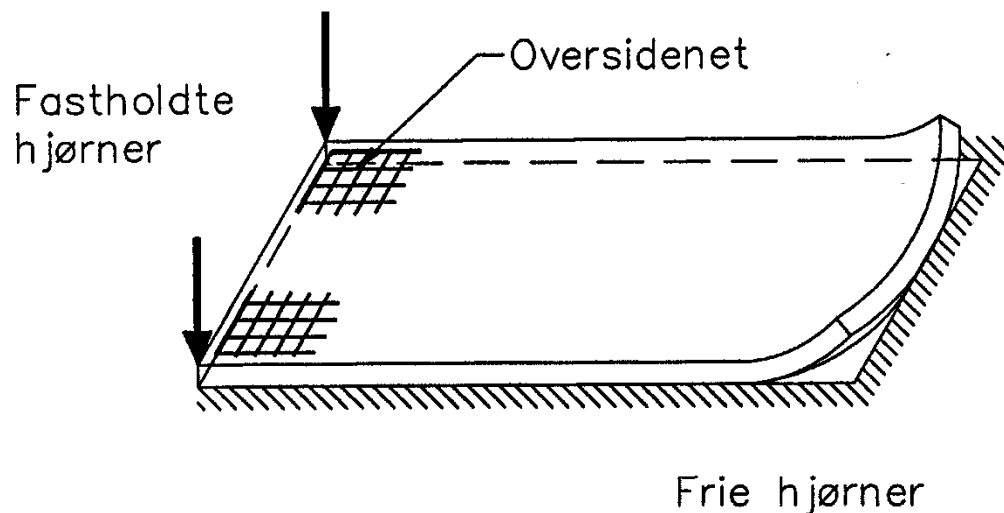
men ved et knæk på randkurven vil der opstå en koncentreret reaktion P

$$P = m_{nt,2} - m_{nt,1}$$

Ved et knæk på 90° bliver reaktionen P

$$P = 2 m_{nt,2} = -2 m_{nt}$$

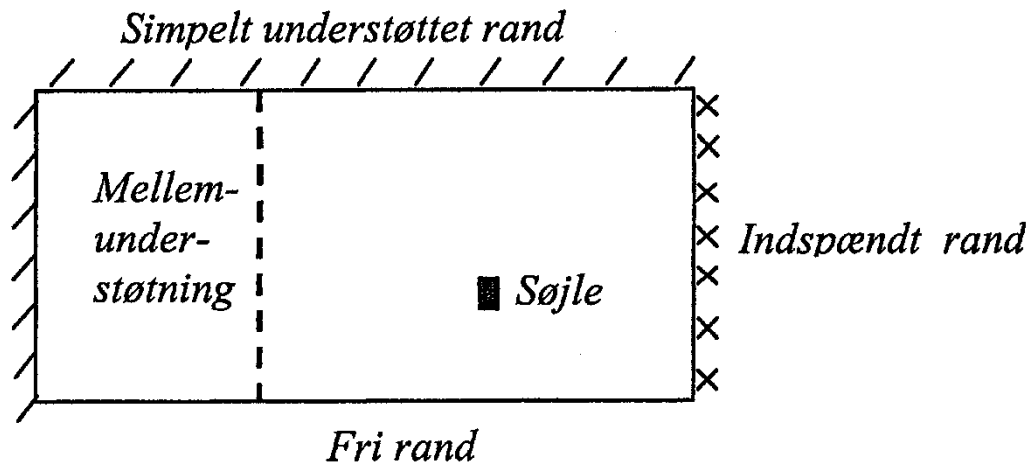
Dobbeltspændte pladers hjørner



Dobbeltspændte pladers hjørner vil bøje op, medmindre de fastholdes.

Dette kræver oversidearmering ved pladehjørner – samt forankring ned i de underliggende konstruktioner.

Randbetingelser



Indspændt rand:

krav til flytningerne: $u = 0$, $\alpha_n = 0$ og $\alpha_t = 0$;
snitkræfter m_n , m_{nt} og v_n er ukendte.

Simpel understøtning:

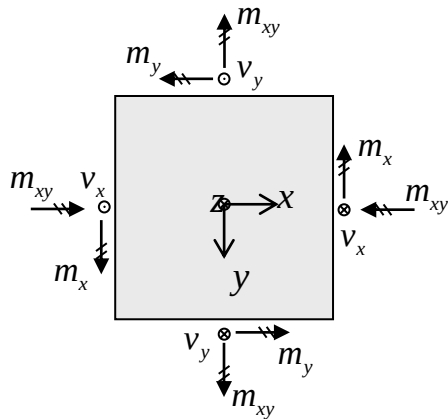
krav til snitkræfter: $m_n = 0$;
krav til flytninger: $u = 0$ og $\alpha_t = 0$;
de øvrige størrelser α_n , m_{nt} og v_n er ukendte.

Fri rand:

krav til snitkræfterne: $m_n = 0$, $m_{nt} = 0$ og $v_n = 0$;
flytningerne u , α_n og α_t er ukendte.

Resume: Ligevægt og randbetingelser

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_z = 0$$



$$m_y(x, -\frac{l_y}{2})$$

$$r_y(x, -\frac{l_y}{2}) = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=-\frac{l_y}{2}}$$

$$P = -2m_{xy}(-\frac{l_x}{2}, -\frac{l_y}{2})$$

$$m_x(-\frac{l_x}{2}, y)$$

$$r_x(-\frac{l_x}{2}, y) = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{l_x}{2}}$$

$$P = 2m_{xy}(\frac{l_x}{2}, -\frac{l_y}{2})$$

$$m_x(\frac{l_x}{2}, y)$$

$$r_x(\frac{l_x}{2}, y) = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=\frac{l_x}{2}}$$

$$P = 2m_{xy}(-\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2})$$

$$m_y(x, \frac{l_y}{2})$$

$$r_y(x, \frac{l_y}{2}) = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=\frac{l_y}{2}}$$

$$P = -2m_{xy}(\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2})$$