

# Dobbeltspændte plader

## Løsningsmuligheder

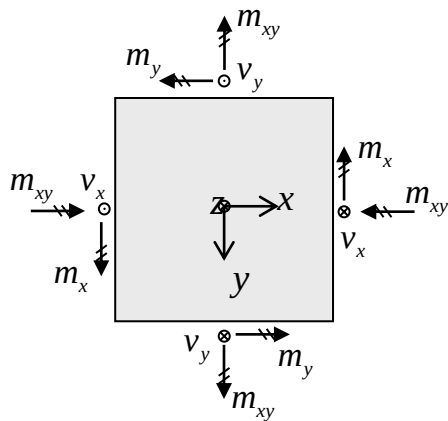
Per Goltermann

# Lektionens indhold (Løsningsmuligheder)

1. Ligningerne
2. Arbejdskurver
3. Løsningsmuligheder
4. Uarmerede plader, elastiske
5. Armerede plader

# 1. Ligningerne

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_z = 0$$



$$m_y(x, -\frac{l_y}{2})$$

$$r_y(x, -\frac{l_y}{2}) = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=-\frac{l_y}{2}}$$

$$P = -2m_{xy}(-\frac{l_x}{2}, -\frac{l_y}{2})$$

$$m_x(-\frac{l_x}{2}, y)$$

$$r_x(-\frac{l_x}{2}, y) = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{l_x}{2}}$$

$$P = 2m_{xy}(\frac{l_x}{2}, -\frac{l_y}{2})$$

$$m_x(\frac{l_x}{2}, y)$$

$$r_x(\frac{l_x}{2}, y) = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=\frac{l_x}{2}}$$

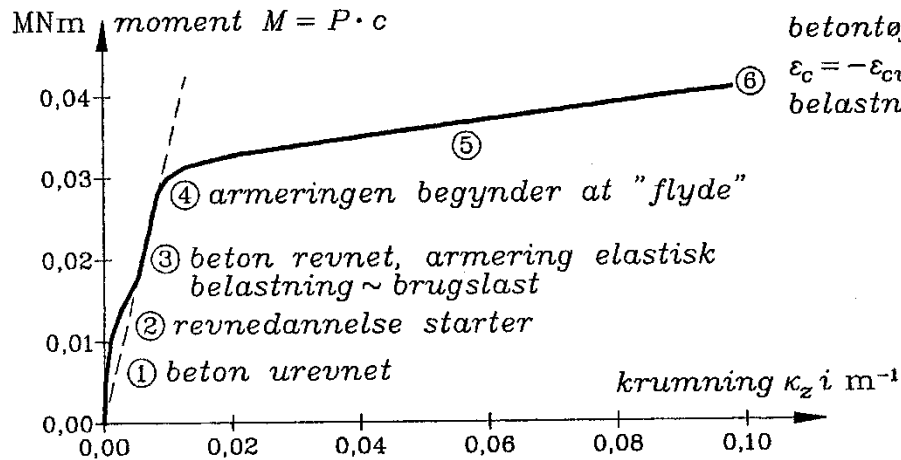
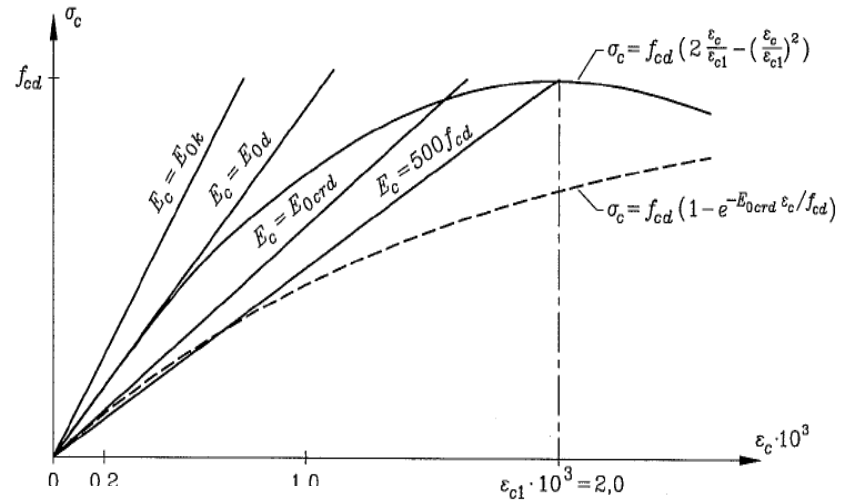
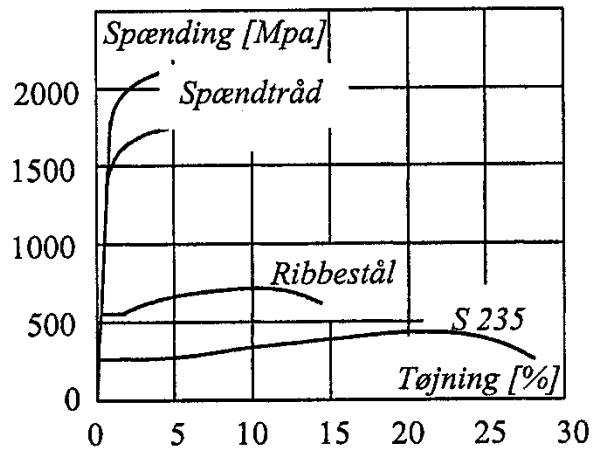
$$P = 2m_{xy}(-\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2})$$

$$m_y(x, \frac{l_y}{2})$$

$$r_y(x, \frac{l_y}{2}) = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=\frac{l_y}{2}}$$

$$P = -2m_{xy}(\frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2})$$

# 2.Arbejdskurver



betontøjningen  
 $\epsilon_c = -\epsilon_{cu} = -0,35\%$   
 belastning ~ brudlast

"Som sædvanligt": Vi må forenkle arbejdskurver og/eller formler – eller bruge numeriske metoder

### 3. Løsningsmuligheder

1. Urevnet tværsnit, lineært-elastisk
2. Delvist revnet (kræver ulineær FEM)
3. Fuldt revnet tværsnit, lineært elastisk
4. Nedreværdiløsning – DS411 model (B11)
5. Nedreværdiløsning – strimmelmetode (B11)
6. Øvreværdiløsning – brudliniemetode (B12)

# 4. Uarmerede plader, elastiske

Regnes hele tværsnittet elastisk og urevnet, så finder man

$$\begin{array}{l}
 \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\
 \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\
 \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\
 \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\
 \tau_{xy} = \frac{Ez}{1+\nu}\kappa_{xy}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 m_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\
 m_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\
 m_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\kappa_{xy}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 m_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\
 m_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\
 m_{xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy}
 \end{array}$$

Indsættes disse i ligevægtsligningen, så finder vi differentialligningen

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

samt de tilhørende randbetingelser og hjørnereaktioner (ved 90° hjørner)

$$\nu_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \nu_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad P = -2m_{xy}$$

# Elastiske pladers nedbøjninger

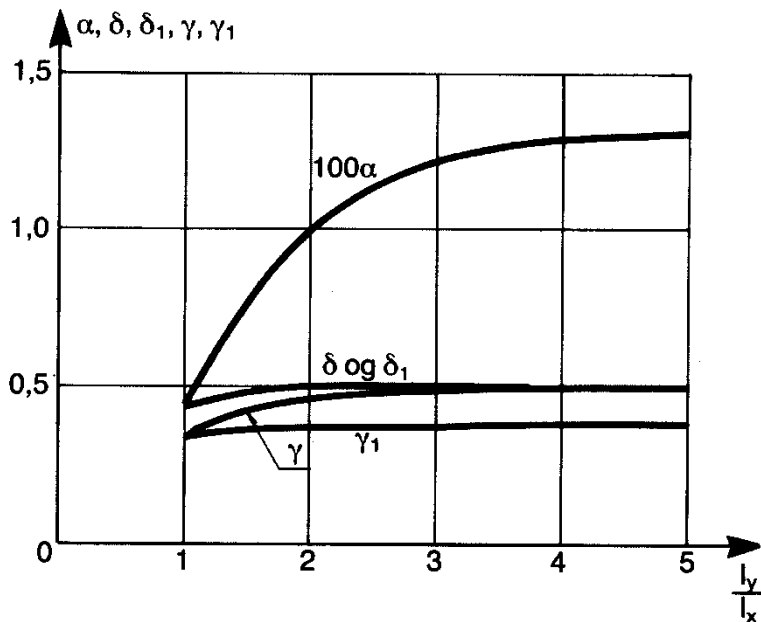
Nedbøjningen vinkelret på pladens plan benævnes  $u$ .

$$u_{\max} = \alpha \frac{q l_x^4}{D}$$

Ligningerne kan løses med rækkeudvikling, så nedbøjninger, reaktioner og knudekræfter kan bestemmes.

Løsningerne kan i en del andre tilfælde slås op i Teknisk Ståbi eller i andre bøger.

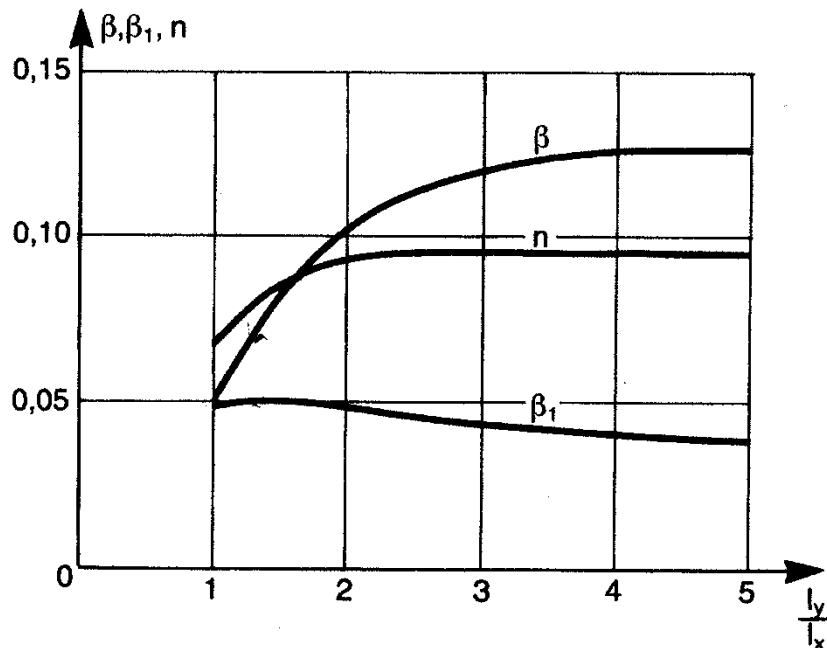
Uddrag fra Teknisk Ståbi er vist til venstre og illustrerer klart at udbøjningen er reduceret i dobbeltspændte plader, hvor de to sidelængder ( $l_x$  og  $l_y$ ) er af samme størrelsesorden.



# Elastiske pladers momenter

Det maksimale moment findes som

$$m_{\max} = \text{maksimum}(\beta, \beta_1) \cdot q \cdot l_x^2 \leq \frac{1}{6} t^2 f_{\text{ctd}}$$

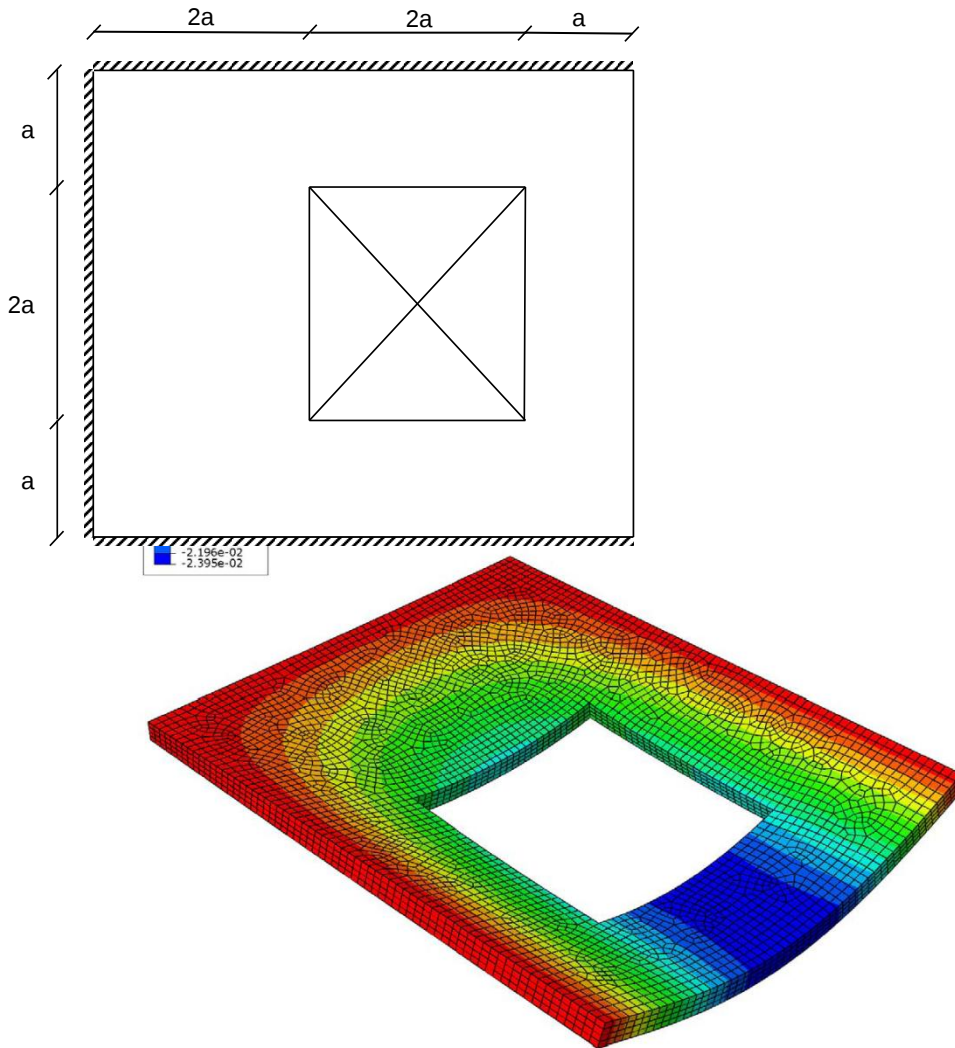


Figuren til venstre viser klart at momenterne også reduceres med op til 60 % ved at regne pladen dobbeltspændt.

Det skal kontrolleres om momenterne overstiger revnemomentet i pladen – sker det skal der regnes med revnet tværsnit =>

(EI/bredde erstatter D).

# 5. Armerede plader



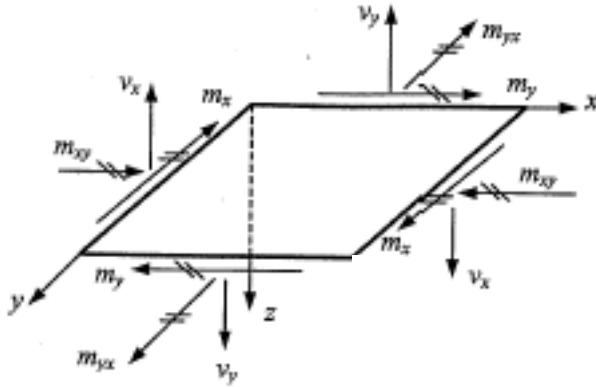
Anvendelsestilstanden:

- Plader med revner kan regnes 100 % revnede (på den sikre side). Her bliver beregningerne lineær og simple ( $EI$ /bredde erstatter  $D$ ).
- Plader kan også regnes delvist revnede, men dette kræver ulineær FEM, hvilket er ret kompliceret.

Brudtilstanden:

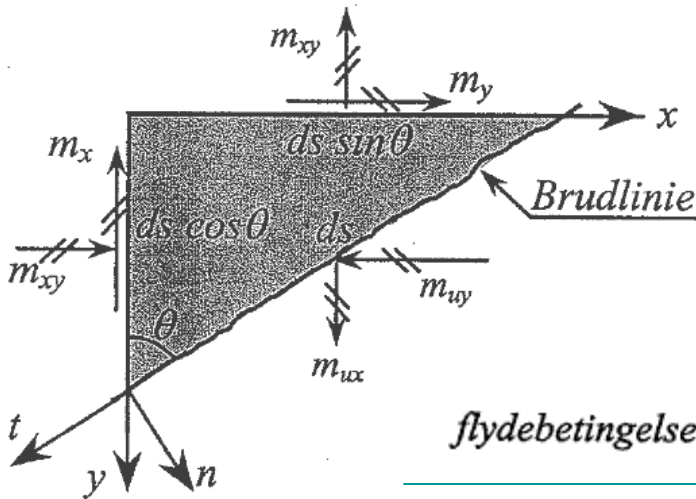
- Vi ser kun på statisk tilladelige modeller (fx FEM eller andre nedreværdiløsninger) og checker bøjningsbrudbæreevne af tværsnittene

# Armerede plader, brudbetingelser



Da pladen er tynd kan man uden større fejl se bort fra forskydningskræfternes indflydelse, hvorved en flydebetingelse må kunne udtrykkes ved

$$F(m_x, m_y, m_{xy}) = 0$$



$$m_x ds \cos \theta + m_{xy} ds \sin \theta = m_{ux} ds \cos \theta$$

$$m_y ds \sin \theta + m_{xy} ds \cos \theta = m_{uy} ds \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{m_{ux} - m_x}{m_{xy}}$$

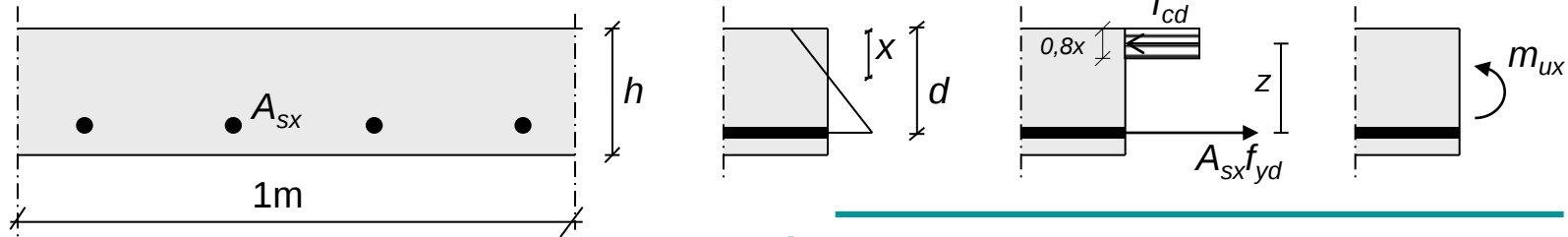
$$\cot \theta = \frac{m_{uy} - m_y}{m_{xy}}$$

flydebetingelsen i en positiv brudlinie:  $-(m_{ux} - m_x)(m_{uy} - m_y) + m_{xy}^2 = 0$

flydebetingelsen i en negativ brudlinie:  $-(m'_{ux} + m_x)(m'_{uy} + m_y) + m_{xy}^2 = 0$

# Armerede plader, styrker

## ■ Armerede betonplader



Normalkraften er 0

$$0,8xf_{cd} - A_{sx}f_{yd} = 0 \Rightarrow x = \frac{A_{sx}f_{yd}}{0,8f_{cd}}$$

Brudmoment er

$$\begin{aligned} m_{ux} &= A_{sx}f_{yd}(d - 0,4x) = A_{sx}df_{yd}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{A_{sx}f_{yd}}{df_{cd}}\right) \\ &= A_{sx}f_{yd}z \end{aligned}$$

Der forudsættes normalt armeret tværsnit  
dvs der skal være flydning i armeringen:

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x}\varepsilon_{cu} > \varepsilon_y$$

For plader haves normalt at  $\omega_x = \frac{A_{sx}f_{yd}}{df_{cd}} < 0,1$

så derfor er

$z = d\left(1 - \frac{1}{2}\omega_x\right) > 0,95d$  dvs z er næsten konstant

og følgelig er  $m_{ux}$  næsten proportional med  $A_{sx}$