

Dobbeltspændte plader Nedreværdiløsning - Strimmelmetoden

Per Goltermann

Lektionens indhold

1. Hvad er en nedreværdiløsning ?
2. Strimmelmetoden
3. Eksempler med forskellige plader

1. Hvad er en nedreværdiløsning ?

- En nedreværdiløsning opfylder ligevægtsligningen og de tilhørende randbetingelser.
- Løsningen kan være gættet og derfor normalt ikke være optimal – men er mulig og på den sikre side.
- Med en nedreværdiløsning viser vi reelt at det er muligt at optage kræfterne på den måde vi har valgt – valget behøves dog ikke at være det der giver den højeste bæreevne.
- Løsningen kan ignorere fx. pladernes evne til at optage vridende momenter el.lign. – dette reducerer normalt bæreevnen yderligere.

Eksempler på nedreværdiløsninger

1. Ved kontinuerte bjælker vælger vi en indspændingsgrad eller et indspændingsmoment og regner derefter med statisk tilladelig model.
2. Ved trykstringermetoden vælger vi en vinkel på trykstringerne – det er kun en af de mulige vinkler, der leder til den optimale (højeste) bæreevneberegning.
3. Ved ren bøjning ignorerer vi normalt hele trækzonen – også den del, hvor trækspændingerne ikke overstiger trækstyrken.

2. Strimmelmetoden

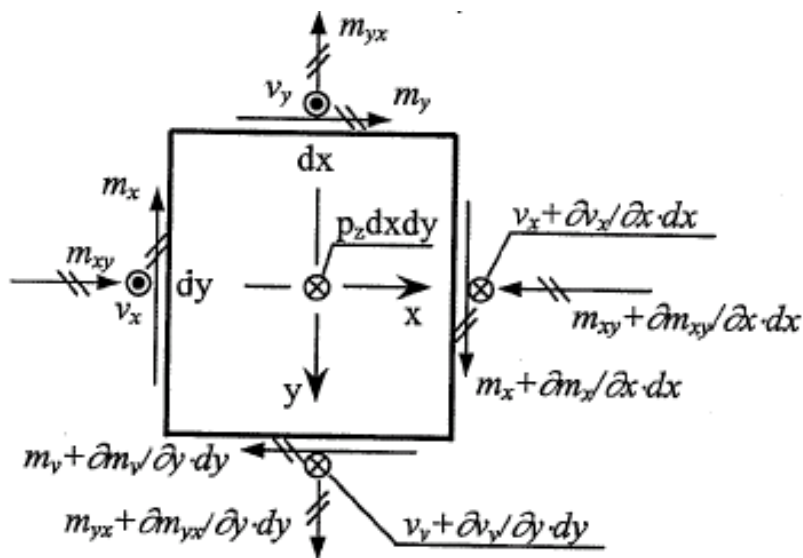


Armeringen i pladen anvendes reelt som bjælkearmering, således at pladen består af bjælker i to retninger.

Bjælkerne i hver retning regnes efter den almindelige bjælketheori.

Vi ignorerer pladens evne til at overføre vridende momenter og vi skønner en fordeling af pladelasten på bjælkerne i de to retninger.

Statiske ligevægtsligninger - strimler



Statisk pladeligevægtsligning

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + p_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_y = 0$$

eller

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_z = 0$$

hvor

$$p_x + p_y = p_z$$

Forskydnings-
snitkræfter

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} = v_x$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = v_y$$

Flydebetingelsen

$$-m'_{ux} \leq m_x \leq m_{ux}$$

$$-m'_{uy} \leq m_y \leq m_{uy}$$

Med andre ord: Vi regner med at der ligger bjælker i begge retninger, som deles om at optage belastningen p_z

Randsnitkræfter

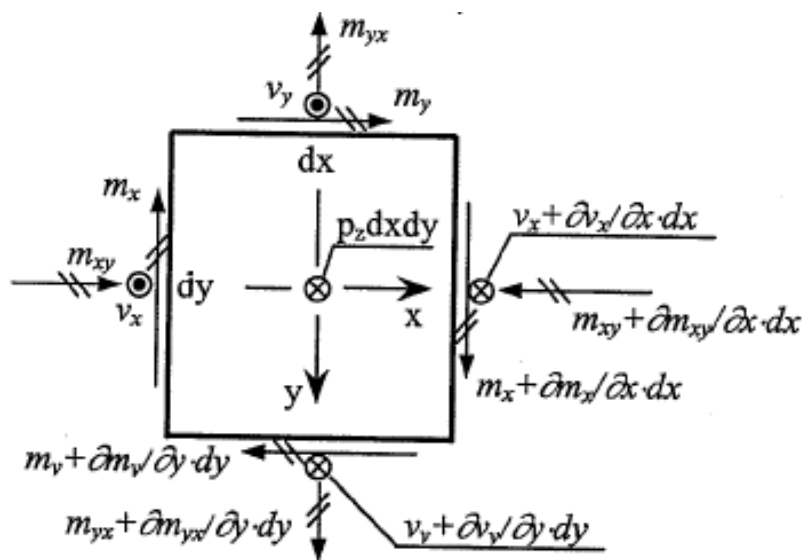
$$r_i = v_n \quad (\text{positiv nedad, som } v_n)$$

$$m_{indsp} = m_n \quad (\text{positiv som snitmoment})$$

$$P = 0$$

Statiske ligevægtsligninger - pladen

Strimmelmetoden ud fra pladeligningerne: Vi ignorerer pladens evne til at optage vridningsmomenter, dvs. vi sætter vridningsmomenterne $m_{xy}=0$:



Forskydnings-
snitkræfter

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = v_x$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = v_y$$

Statisk pladeligevægtsligning

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_z = 0$$

Flydebetingelsen

$$-(m_{ux} - m_x)(m_{uy} - m_y) + m_{xy}^2 \leq 0$$

$$-(m'_{ux} + m_x)(m'_{uy} + m_y) + m_{xy}^2 \leq 0$$

Randsnitkræfter

$$r_i = v_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad (\text{positiv nedad, som } v_n)$$

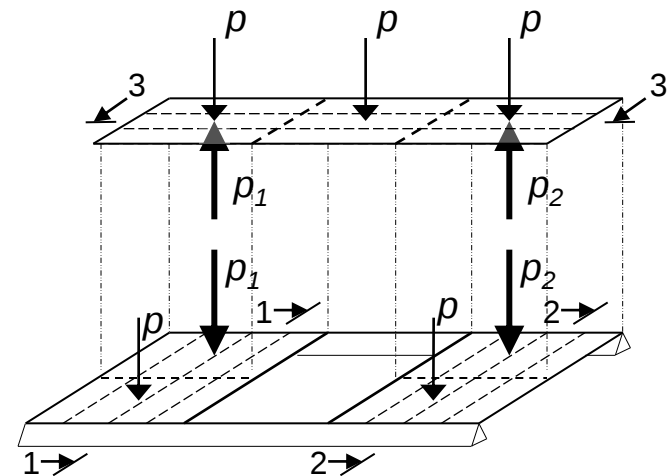
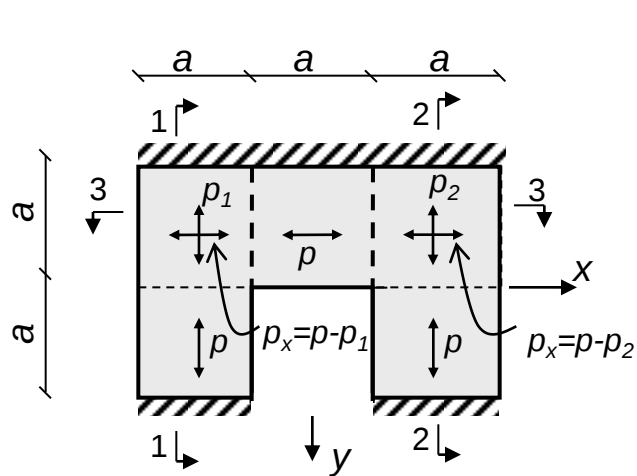
$$m_{indsp} = m_n \quad (\text{positiv som snitmoment})$$

$$P = -(m_{ns,1} + m_{ns,2}) \quad (\text{positiv nedad som } v_n)$$

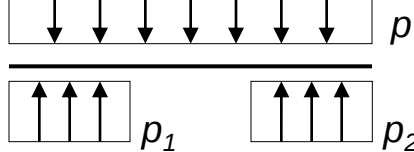
for retv. hjørne $P = -2m_{ns}$

Ved strimmelmetoden kommer der ingen hjørnekræfter

Eks. 1 Dimensionering af ikke rektangulær plade



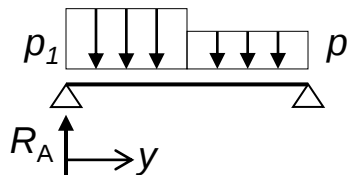
Snit 3



Symmetri: $p_2 = p_1$ Lodret ligevægt: $p_1 = \frac{3}{2}p$

Moment på midten: $m_{x,\max} = p_1 a \cdot a - \frac{3}{2} p a \cdot \frac{3}{4} a = \frac{3}{8} p a^2 \leq m_{ux}$

Snit 2



Momentligvægt: $R_A = \frac{1}{2a} \left(\frac{3}{2} p a \cdot \frac{3}{2} a + p a \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{11}{8} p a$

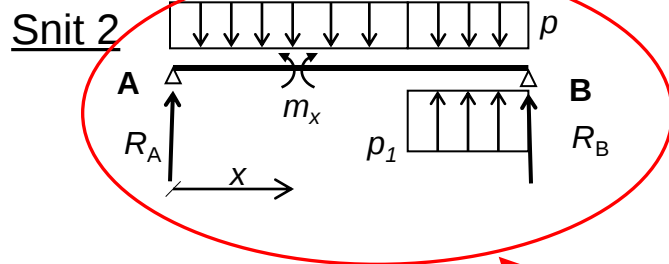
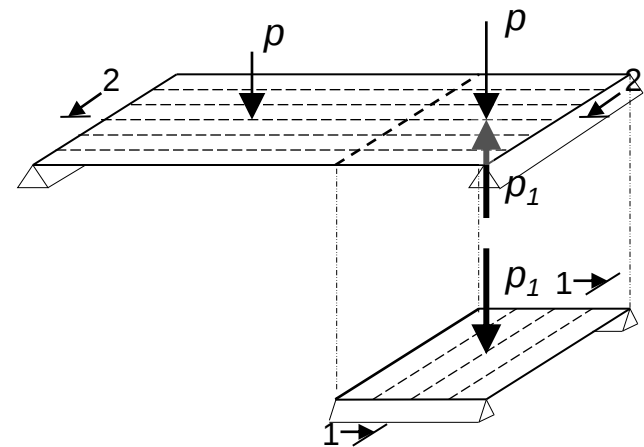
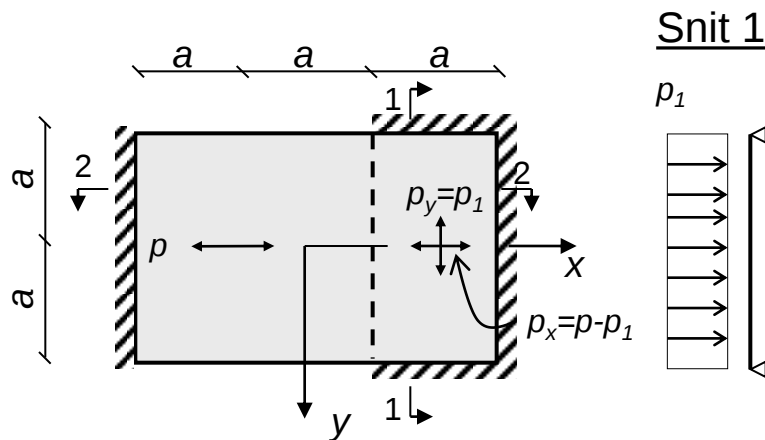
$V = R_A - \frac{3}{2} p y = \frac{11}{8} p a - \frac{3}{2} p y = 0 \Rightarrow y = \frac{11}{12} a$

Moment: $m_{y,\max} = R_A \frac{11}{12} a - \frac{3}{4} p \left(\frac{11}{12} a \right)^2 = \frac{11}{12} p a^2 \left(\frac{11}{8} - \frac{11}{16} \right) = \frac{121}{192} p a^2 \leq m_{uy}$

Snit 1 = Snit 2

Eks. 2 Dimensionering af rektangulær plade

En rektangulær plade med en fri rand som vist på nedenfor er belastet med en jævnt fordelt last p . Bestem med strimmelmetoden de nødvendige brudmomenter.

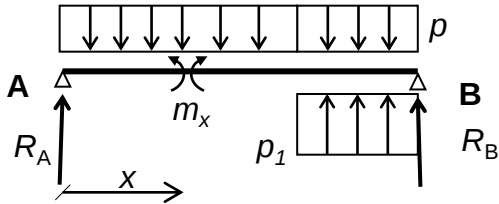


OBS: Hver strimmel har 2
ligevægtsbetingelser.

Mere end 2 ubekendte reaktioner
eller "reaktionsbelastninger" fra
underliggende strimler $\Leftrightarrow$
VALGFRIHED – fx vælg p_1

Eks. 2 Dimensionering af rektangulær plade

Vi vælger $p_1=2p$ og starter med den sidst lagte strimmel (snit 2):



Moment om B giver R_A

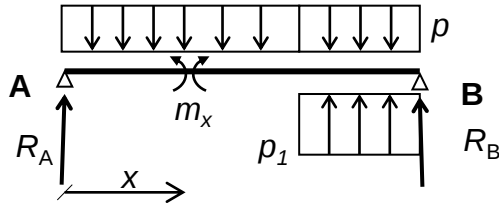
$$R_A \cdot 3a = p \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} - p_1 a \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow R_A = \frac{3}{2}pa - \frac{1}{6}p_1 a = \frac{7}{6}pa$$

Lodret ligevægt giver R_B

$$R_B = 3pa - p_1 a - R_A = -\frac{1}{6}pa$$

Eks. 2 Dimensionering af rektangulær plade

Vi har nu bestemt reaktionerne og finder:



Forskydningskraften

$$v(x) = \begin{cases} R_A - px & \text{for } 0 \leq x \leq 2a \\ R_A - px + p_1(x - 2a) & \text{for } 2a < x \leq 3a \end{cases} \Rightarrow$$

$$v(x) = 0 \text{ i } x = \frac{7}{6}a \leq 2a \text{ og i } x = \frac{17}{6}a > 2a \text{ for } p_1 = 2a \Rightarrow$$

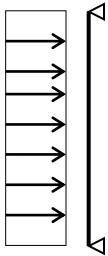
$$m_{\max} = m(x = \frac{7}{6}a) = R_A x - px \cdot \frac{x}{2} = \frac{7}{6}pa \cdot \frac{7}{6}a - p \cdot \frac{7}{6}a \cdot \frac{7}{2 \cdot 6}a = \frac{49}{72}pa^2 \leq m_{ux} \Rightarrow p_2^{(-)} = \frac{72}{49} \cdot \frac{m_{ux}}{a^2}$$

$$m_{\max} = m(x = \frac{17}{6}a) = R_A x - px \cdot \frac{x}{2} + p_1(x - 2a) \cdot \frac{(x - 2a)}{2} = -\frac{1}{72}pa^2 \geq -m'_{ux} \Rightarrow p_2^{(-)'} = 72 \cdot \frac{m'_{ux}}{a^2}$$

Eks. 2 Dimensionering af rektangulær plade

Vi tager nu det næste lag (snit 1):

p_1



$$m_{\max} = \frac{1}{8} p_1 (2a)^2 = pa^2 \leq m_{uy} \Rightarrow p_1^{(-)} = \frac{m_{uy}}{a^2}$$

For given p findes de nødvendige brudmomenterne som

$$m_{uy} \geq pa^2 \quad \text{og} \quad m_{ux} \geq \frac{49}{72} pa^2 \quad \text{og} \quad m'_{ux} \geq \frac{1}{72} pa^2$$

For givne brudmomenter findes bæreevnen p som

$$p = \min(p_1^{(-)}, p_2^{(-)}, p_2^{(-)'}) = \min\left(\frac{m_{uy}}{a^2}, \frac{72}{49} \frac{m_{ux}}{a^2}, 72 \frac{m'_{ux}}{a^2}\right)$$

Der kan sagtens optimeres på valget af p_1 – men hvis brudmomenterne er store nok eller bæreevnen er stor nok, så er bæreevnen OK