

Dobbeltspændte plader Øvreværdiløsning – Brudlinieteori

Per Goltermann

Lektionens indhold

1. Hvad er en øvreværdiløsning ?
2. Bjælker og enkeltspændte dæk eller plader
3. Bjælkers bæreevne beregnet med arbejdsmetoden
4. Dobbeltspændte plader, forsøg
5. Flydelinier og mulige brudfigurer
6. Arbejdsmetoden (virtuelt arbejde)
7. Hjørnekræfter
8. Brug af brudliniemetoden - eksempel

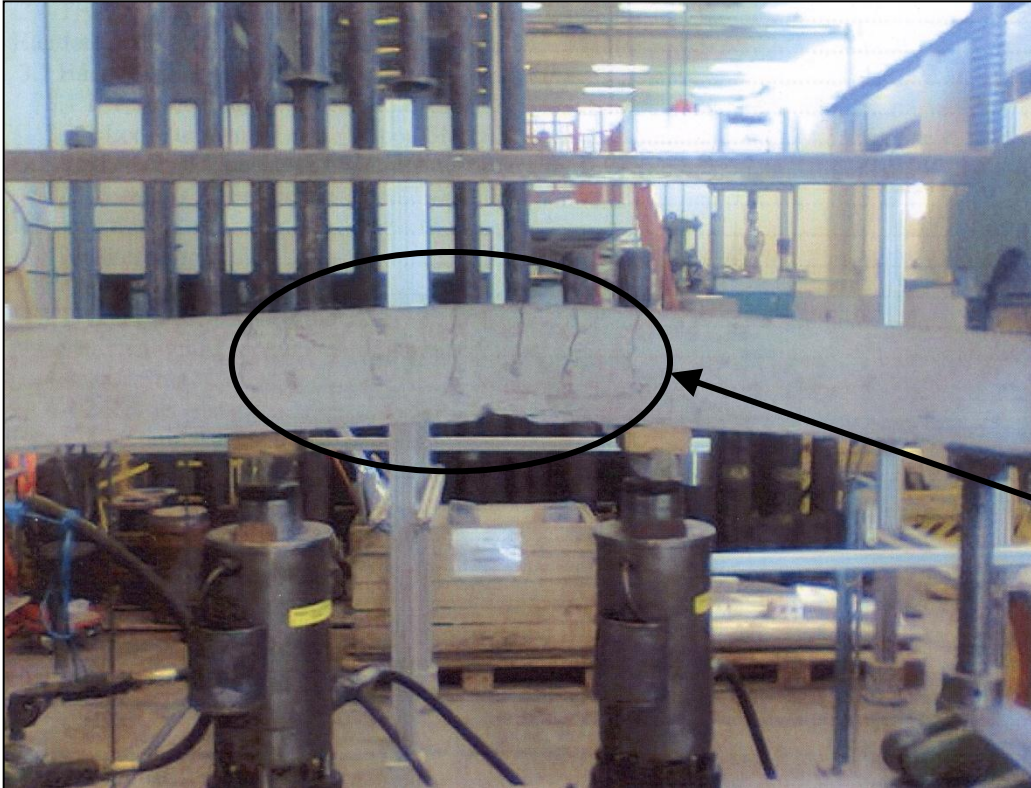
1. Hvad er en øvreværdiløsning ?

- Ved en øvreværdiløsning ser vi på en brudmekanisme, dvs. vi siger at konstruktionen kan bryde sammen ved denne brudmekanisme og vi beregner så ved hvilken last det vil ske – ved andre mekanismer kunne det ske ved lavere last !.
- Brug af øvreværdiløsninger kræver forsigtighed og kræver normalt optimering af brudmekanismen eller gennemregning af flere mekanismer for at komme ned til den korrekte bæreevne.

2. Bjælker og enkeltspændte plader

- Bjælker og enkeltspændte plader regnes på samme vis, dvs. en enkeltspændt plade er blot en meget bred bjælke.
- Bygges der med dækelementer, regnes disse normalt enkeltspændte.
- Vi kan regne bjælkers bæreevner ud med brug af flydeled, samt ydre og indre arbejde (det såkaldte "Virtuelt arbejdes princip").

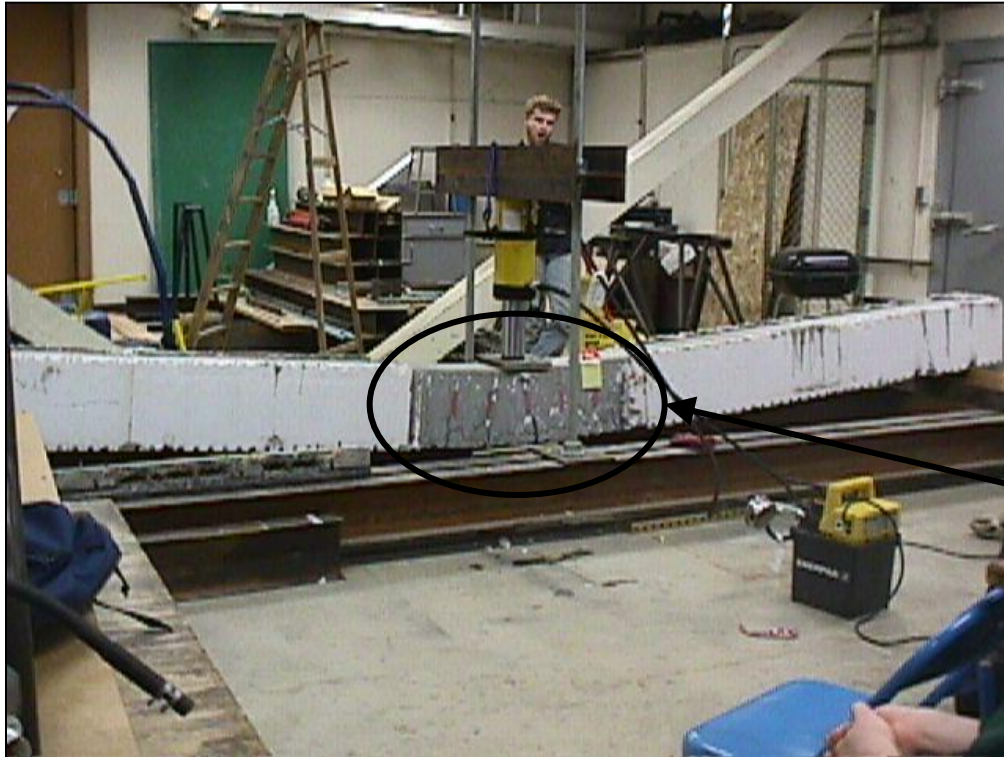
Bøjningsbrud (flydeled) – langt stykke



Ved mindre bøjningsmomenter er betonen urevnet og bjælken har små nedbøjninger – men ved større bøjningsmomenter revner betonen i trækzonen og trækarmeringen overtager en del kræfter og bjælken får væsentlig større nedbøjninger.

Krumningen er markant størst i den del af bjælken, hvor armeringen flyder.

Bøjningsbrud (flydeled) – kort stykke

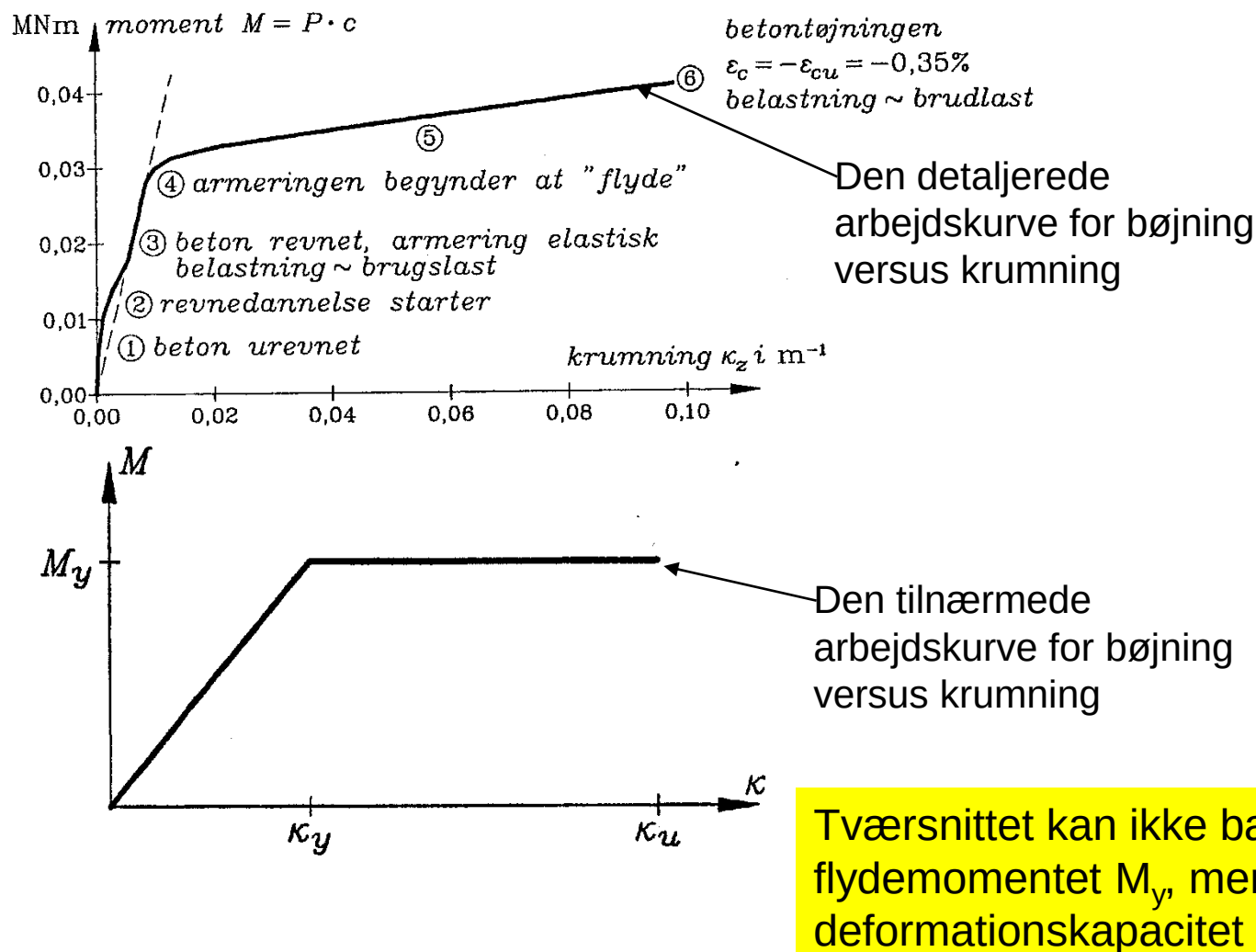


Bøjningsbrud i normaltarmerede tværsnit sker efter store deformationer.

Her er momentfordelingen trekantsformet og flydningen af armeringen og den store krumning er koncentreret ved bjælkemidten.

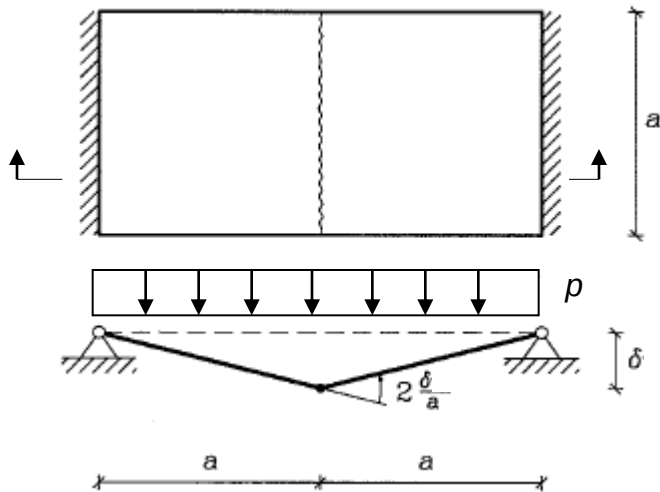
Flydeled kan i virkeligheden være fordelt over et kortere eller længere stykke – men rent regneteknisk regner vi med at flydningen sker i et led.

Normalt armeret bjælke: Bøjning



3. Bæreevne beregnet med arbejdsmetoden

-Hvad er en flydeled/flydelinie?



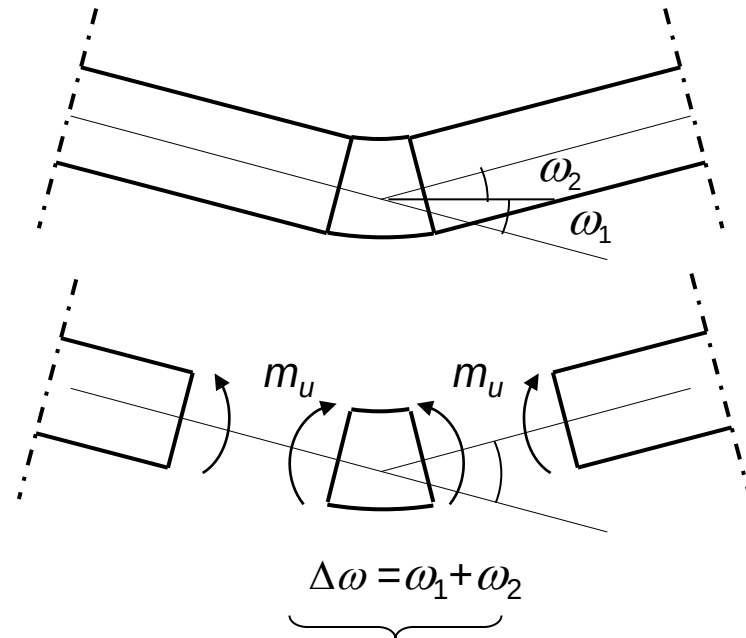
Ydre kræfters arbejde = Indre kræfters arbejde

$$A_y = 2pa^2 \frac{\delta}{2} = pa^2\delta$$

$$A_i = am_u \Delta\omega = am_u \frac{2\delta}{a} = 2m_u\delta$$

$$\boxed{A_y = A_i} \Rightarrow \underline{m_u = \frac{1}{2}pa^2} = \frac{1}{8}p(2a)^2$$

$$\Rightarrow \underline{p = \frac{2m_u}{a^2}}$$

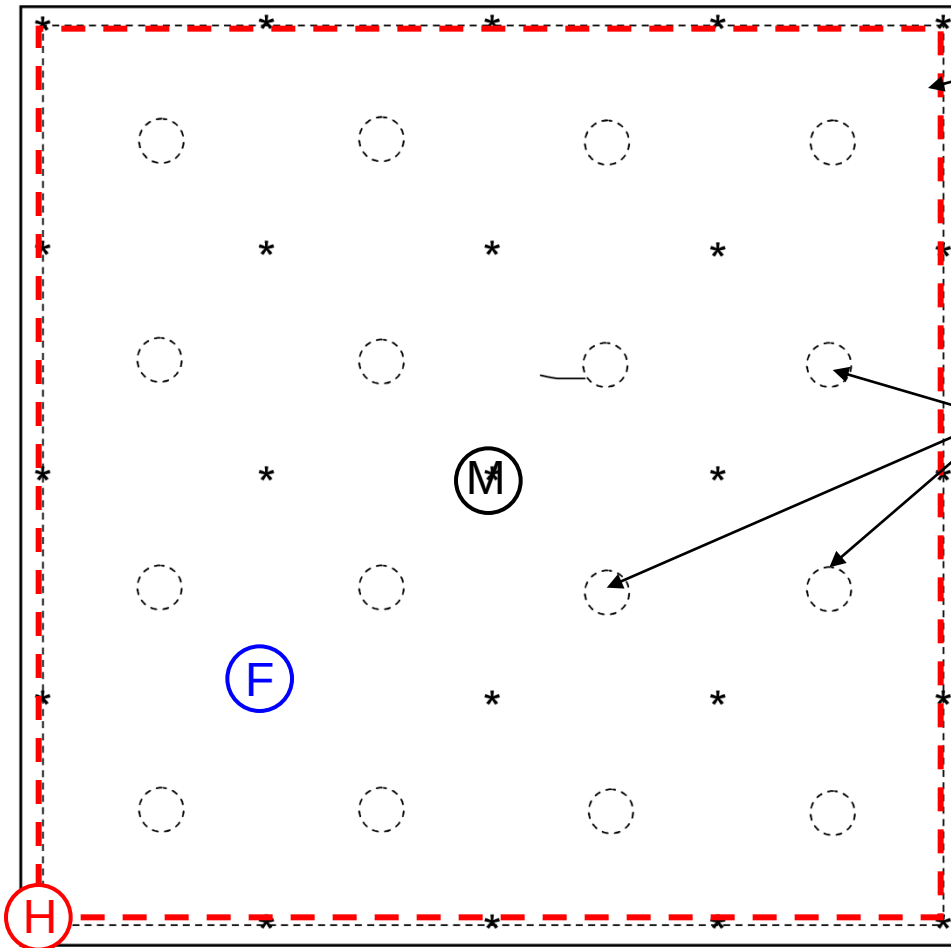


$$\text{Indre arbejde} = m_u \Delta\omega$$

(per længdeenhed)

For at forenkle beregningerne, regner vi med at deformationen sker i et flydeled eller i en flydelinie

4. Dobbeltpændte plader, forsøg



Pladen på 2x2 m understøttes simpelt – men kun for nedadrettede reaktioner.

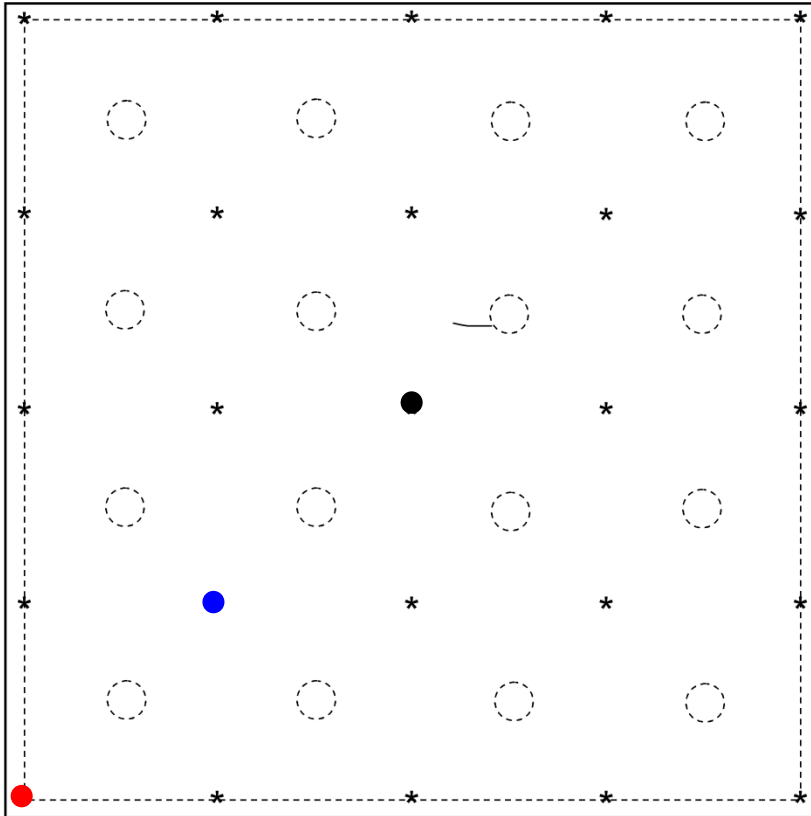
Det er således muligt for hjørnerne at løfte sig.

Pladen belastes med 16 enkeltkræfter, dvs. af en nogenlunde jævnt fordelt last.

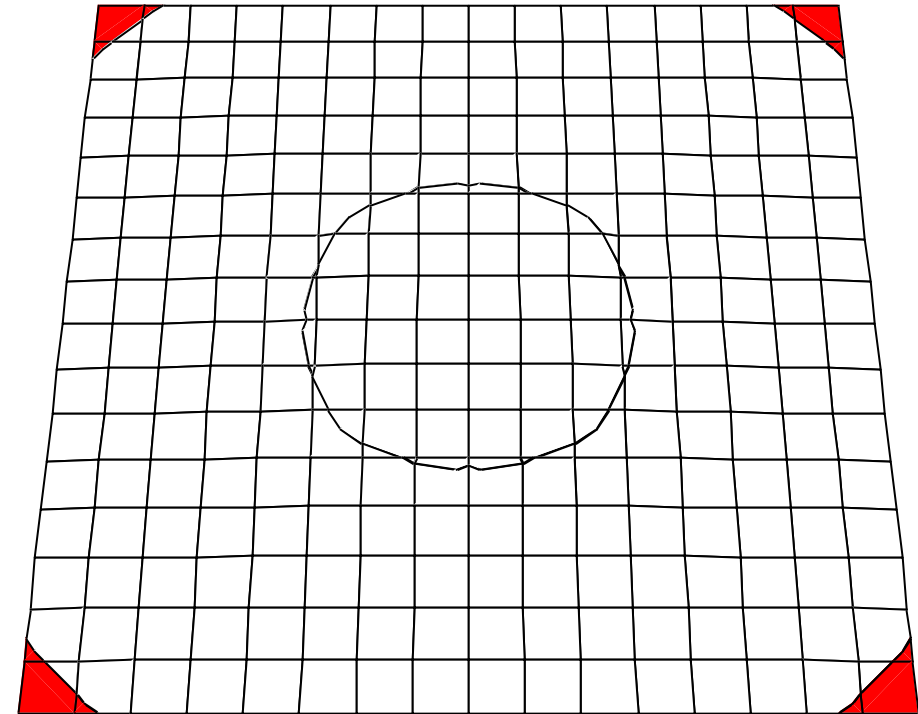
Deformationerne måles i 25 punkter, bl.a. på midten (M), hjørnet (H) og i punkt (F)

Revnerne tegnes op for hvert last trin

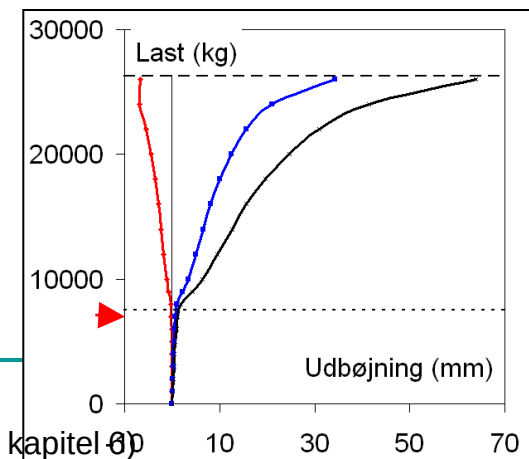
Lasttrin 7000 kg (første revne)



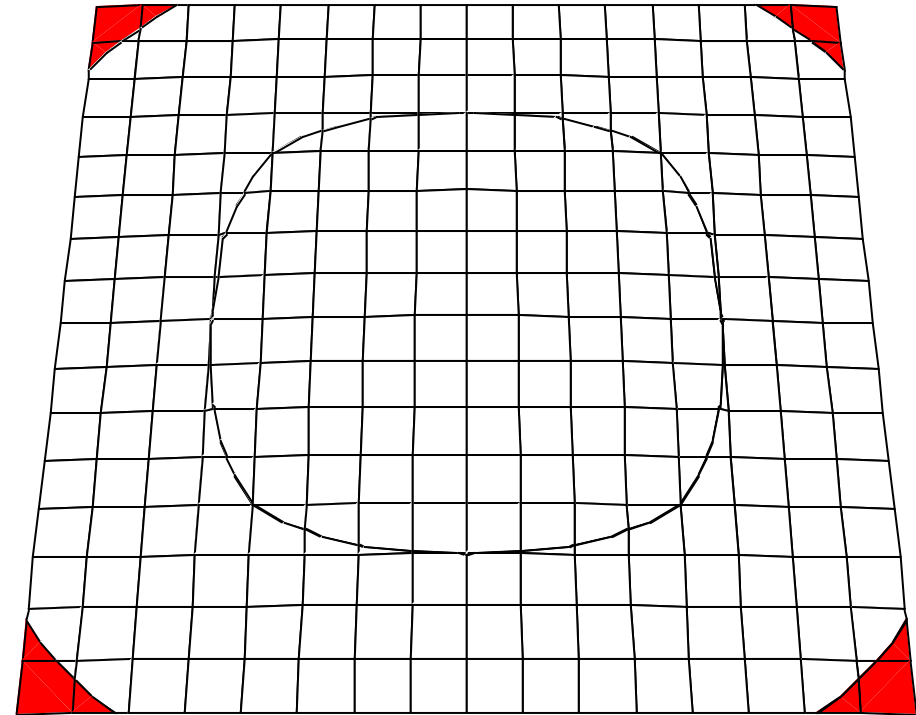
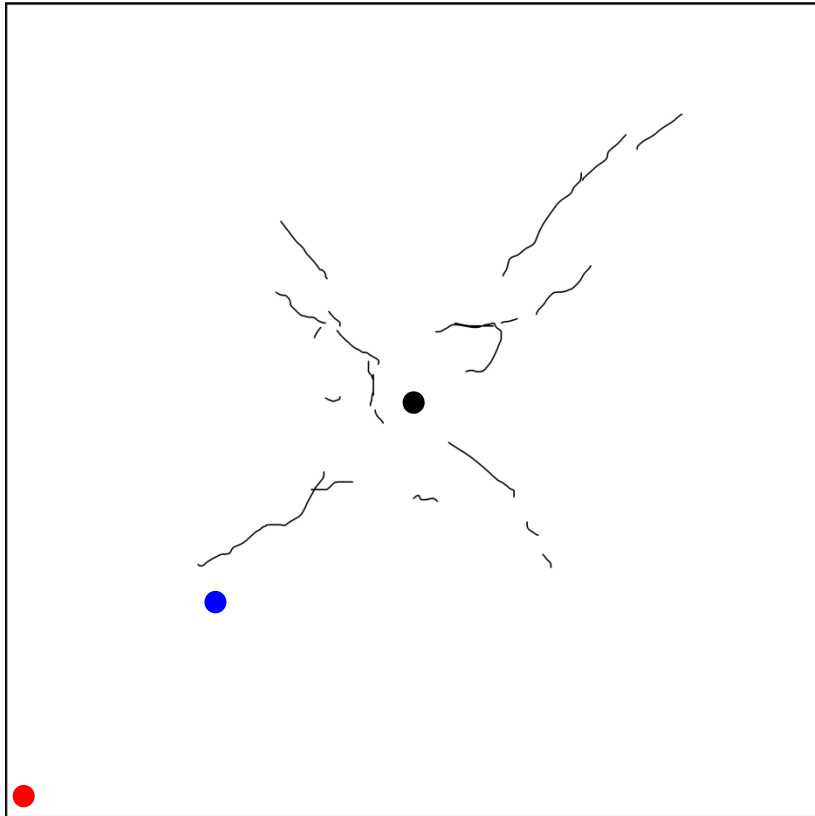
Revner i underside



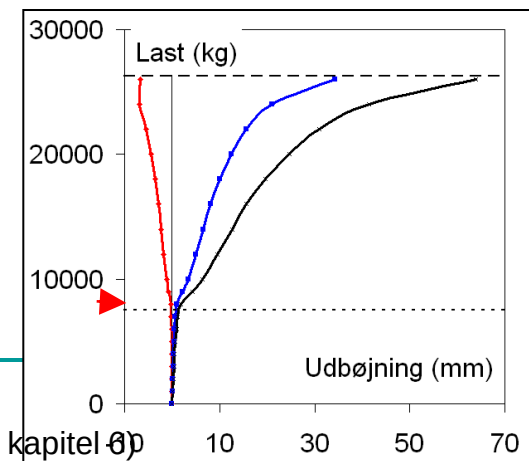
Udbøjninger



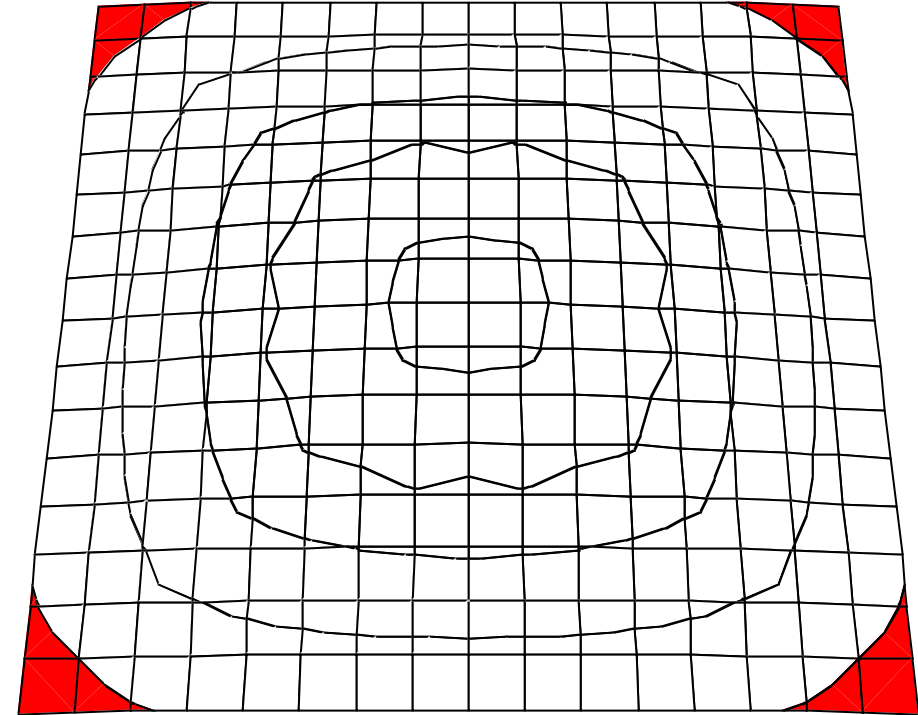
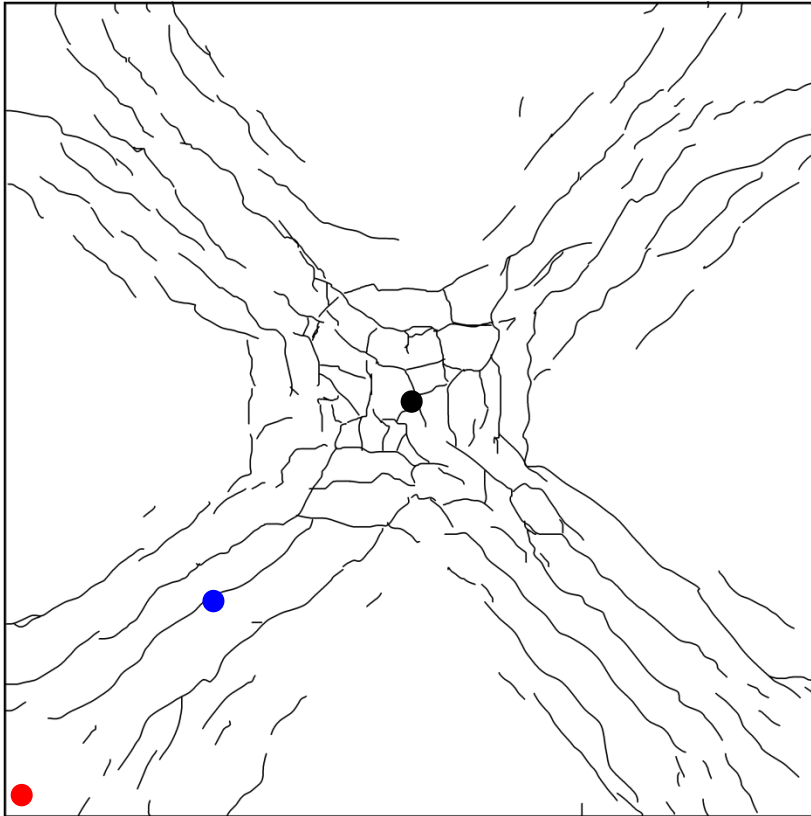
Lasttrin 8000 kg



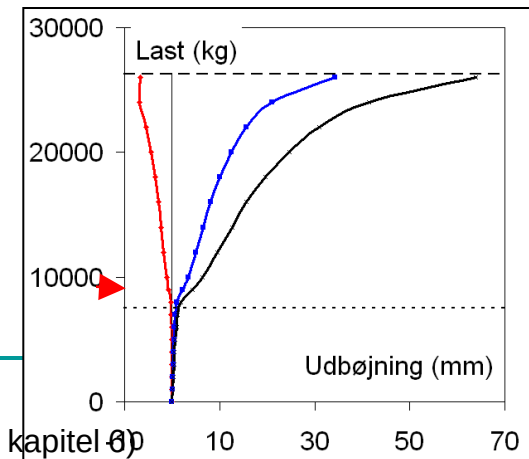
Udbøjninger



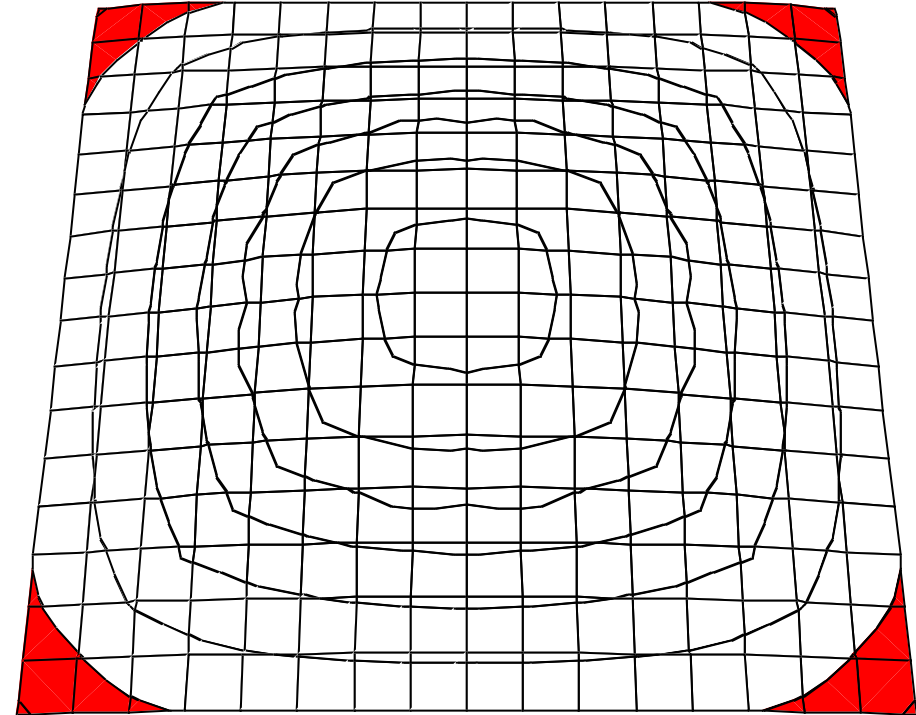
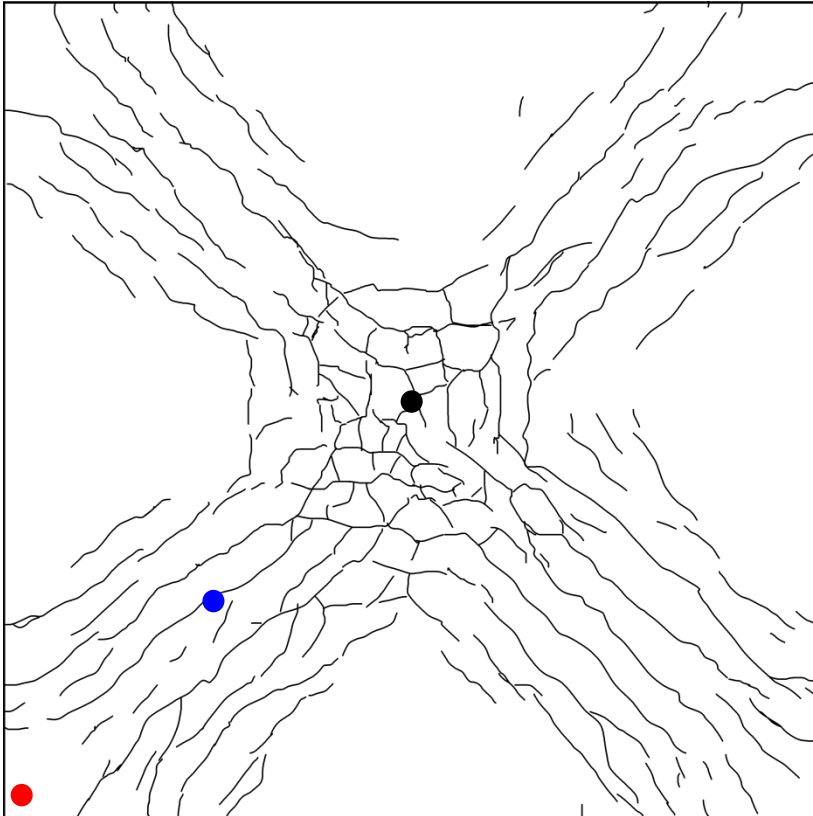
Lasttrin 9000 kg



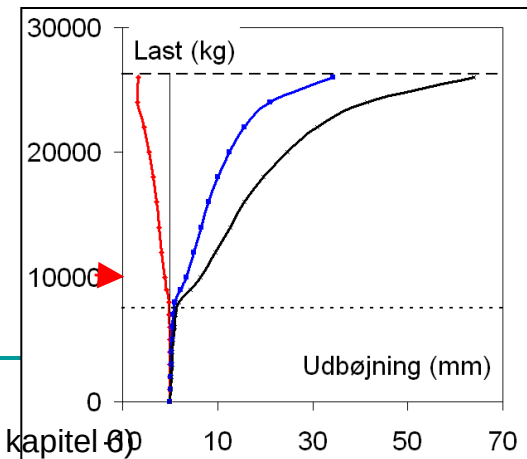
Udbøjninger



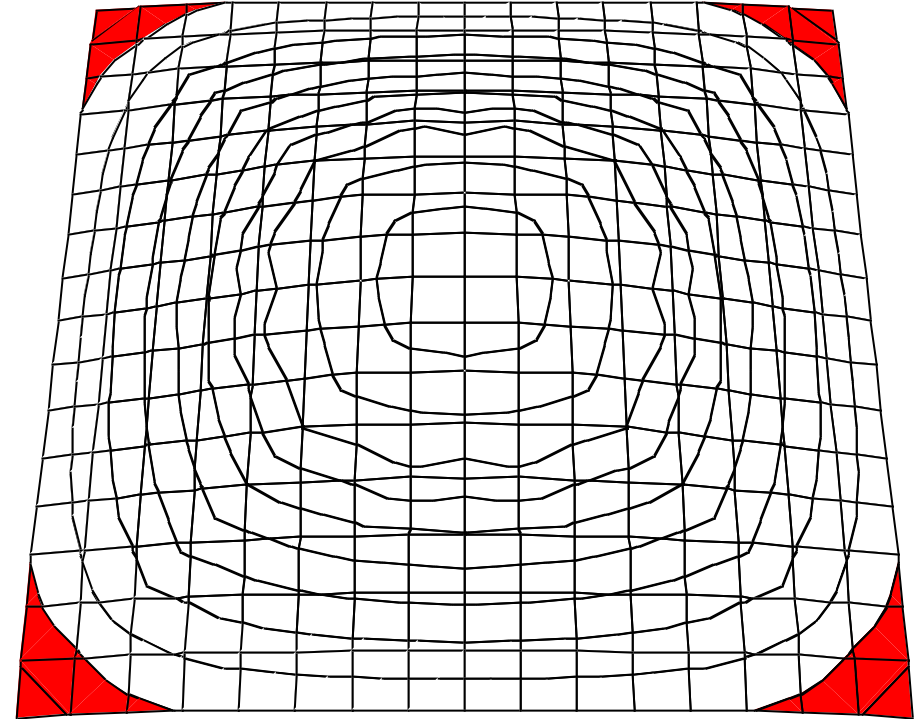
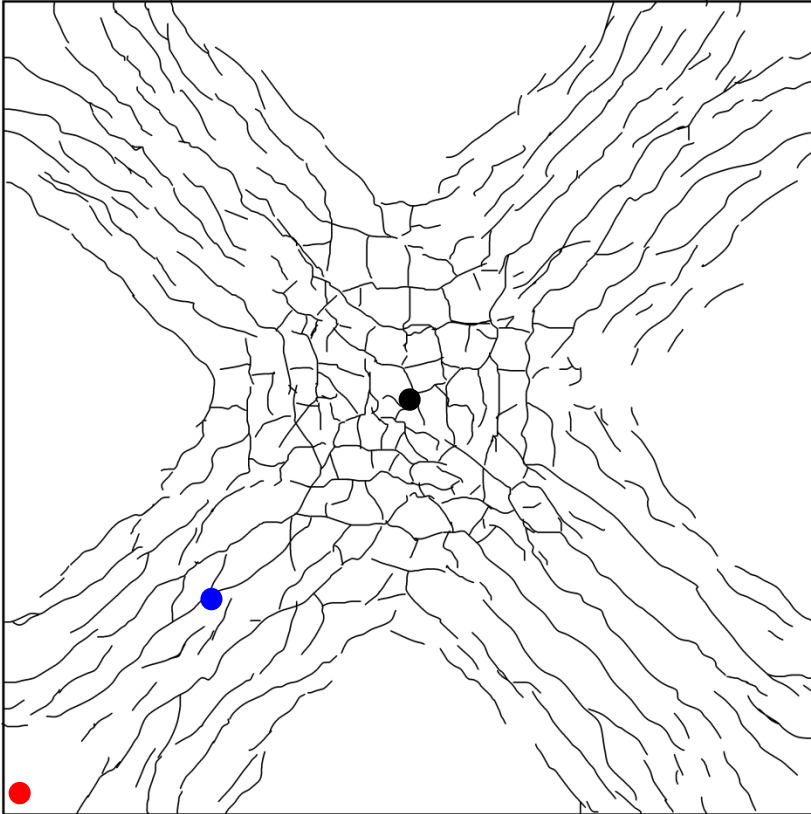
Lasttrin 10000 kg



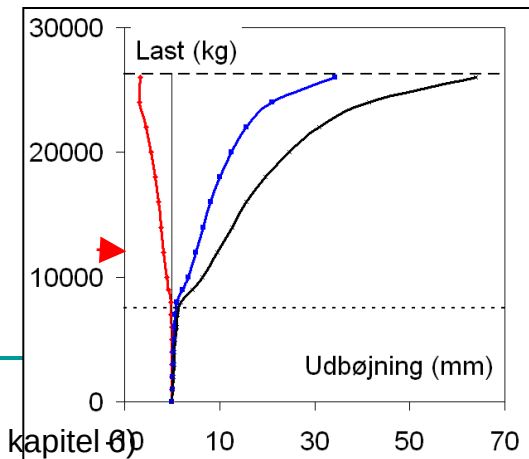
Udbøjninger



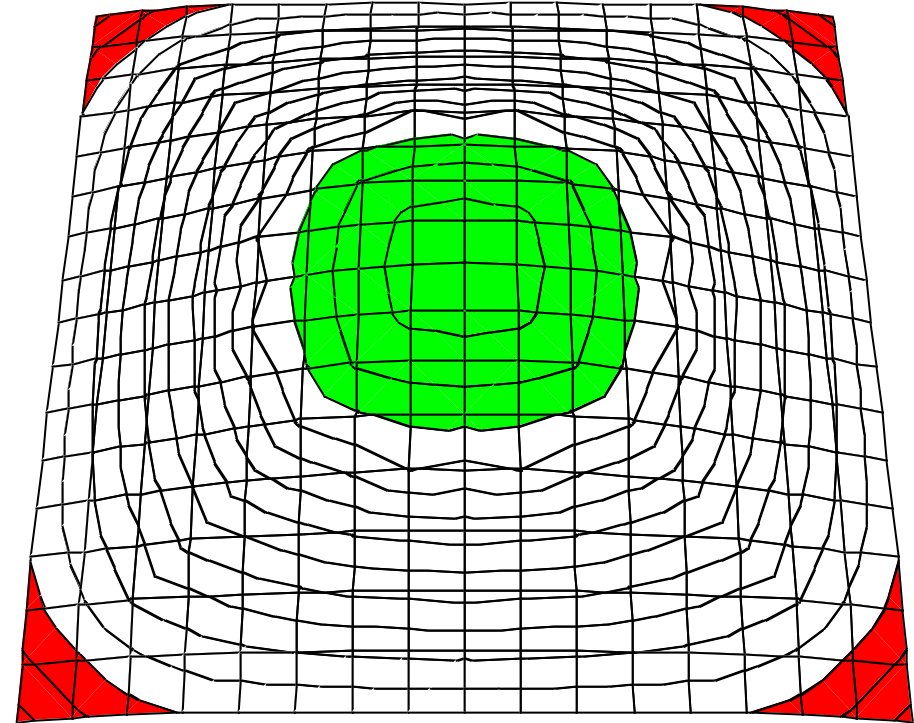
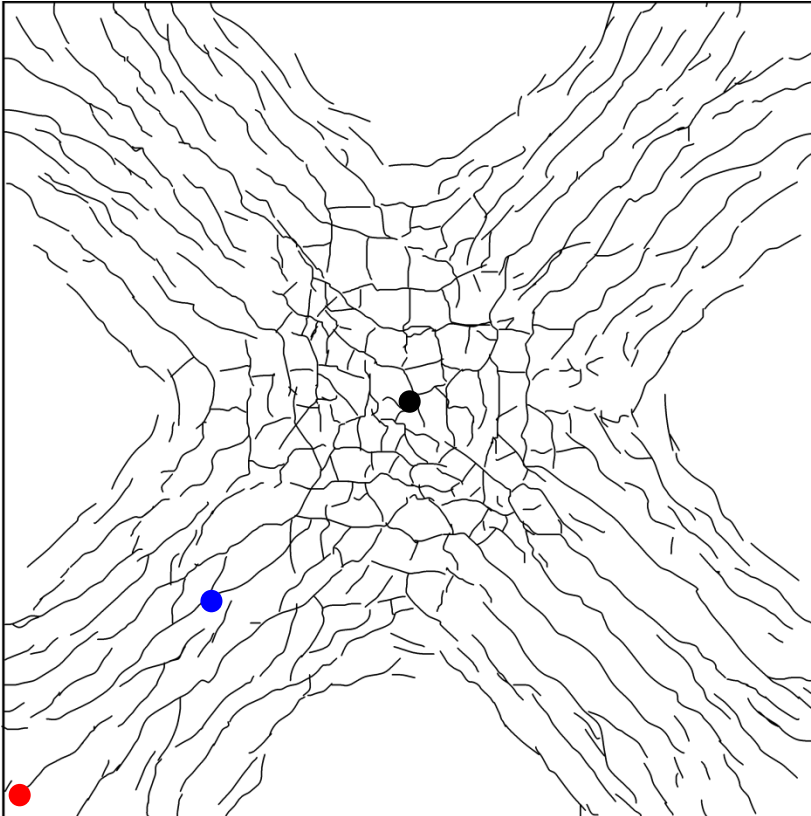
Lasttrin 12000 kg



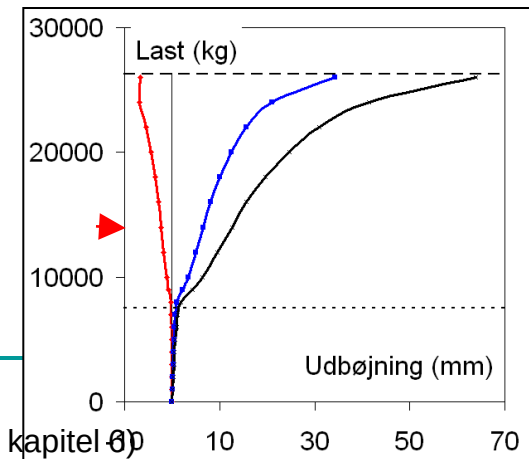
Udbøjninger



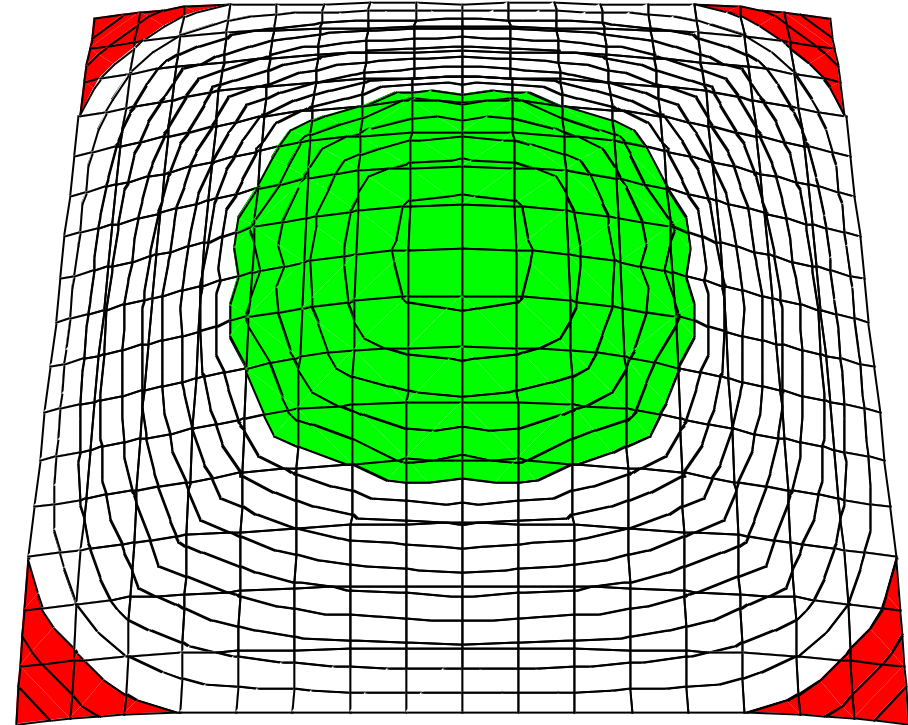
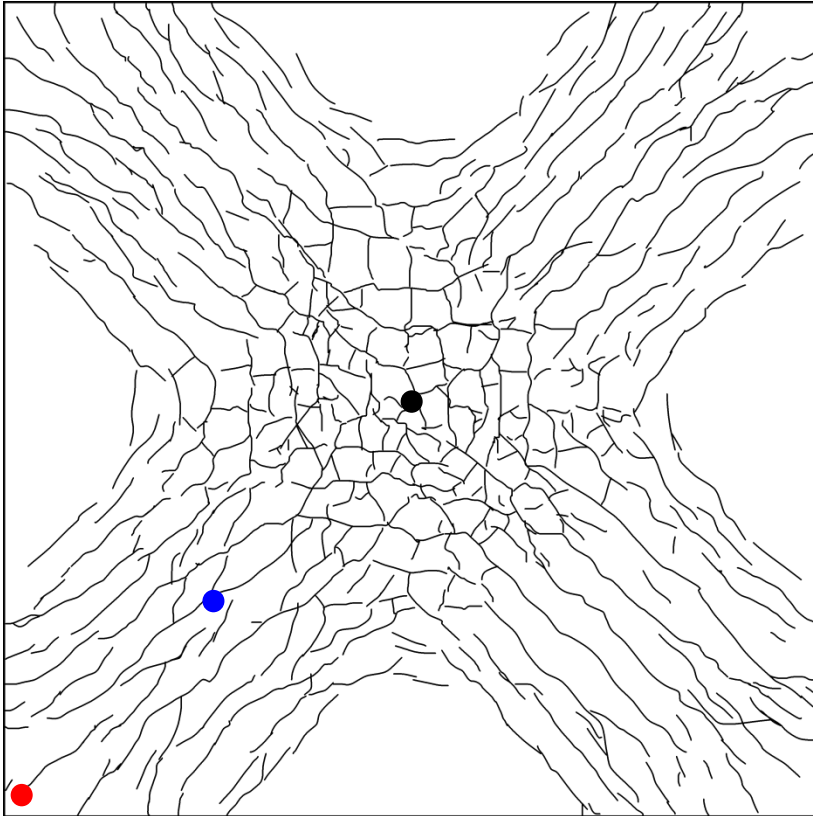
Lasttrin 14000 kg



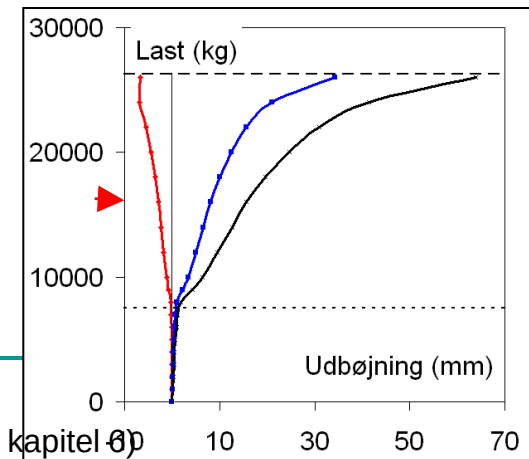
Udbøjninger



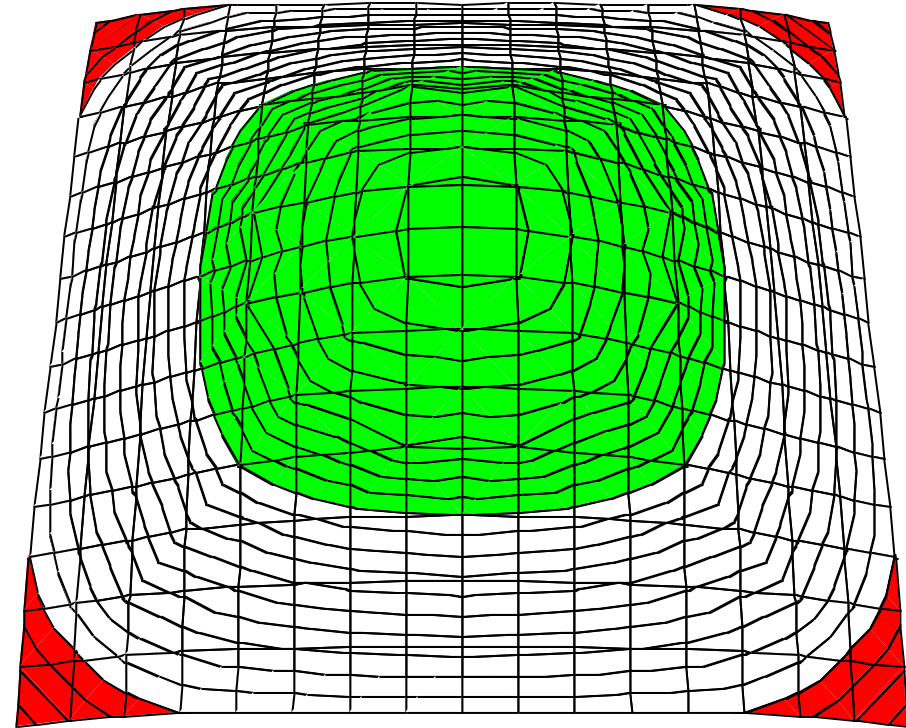
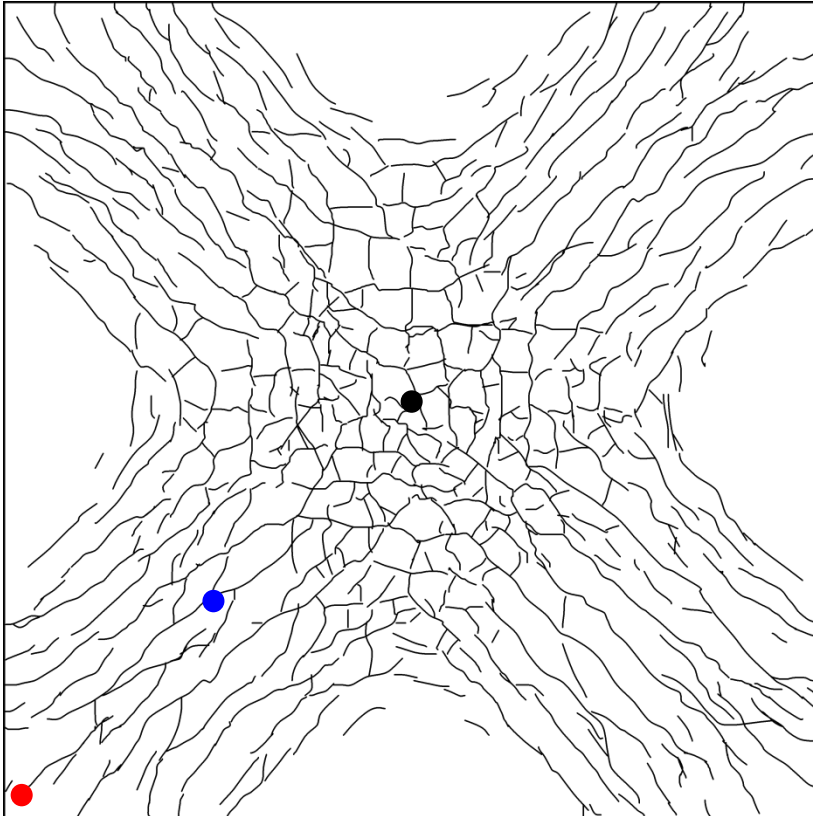
Lasttrin 16000 kg



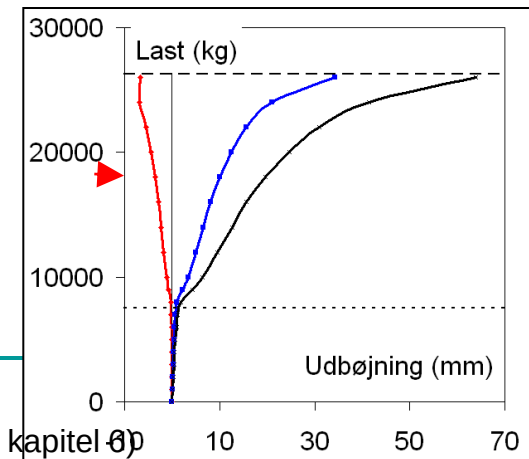
Udbøjninger



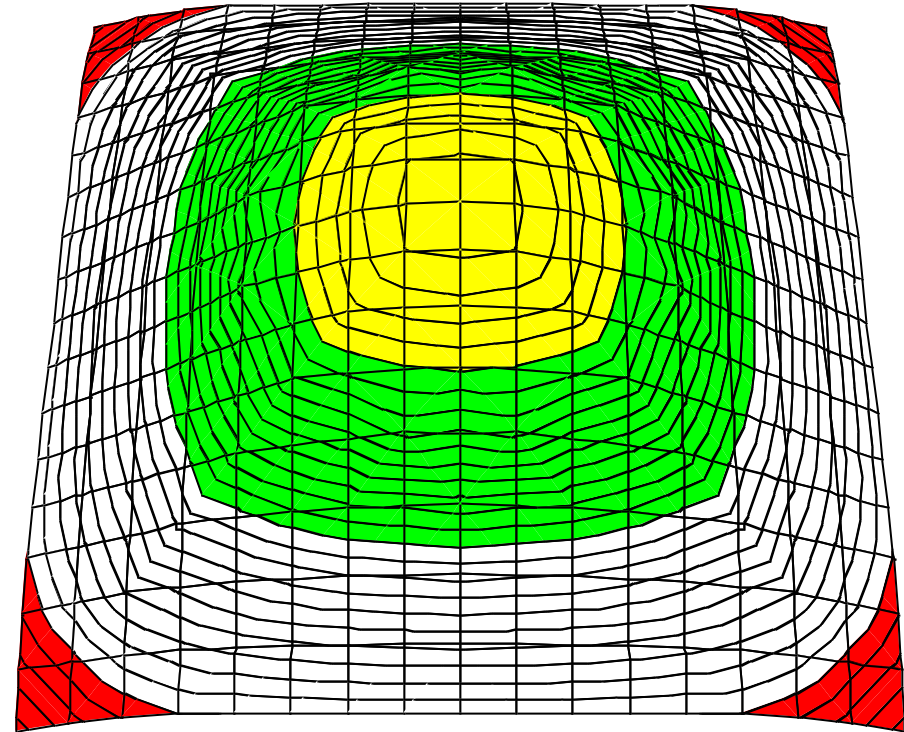
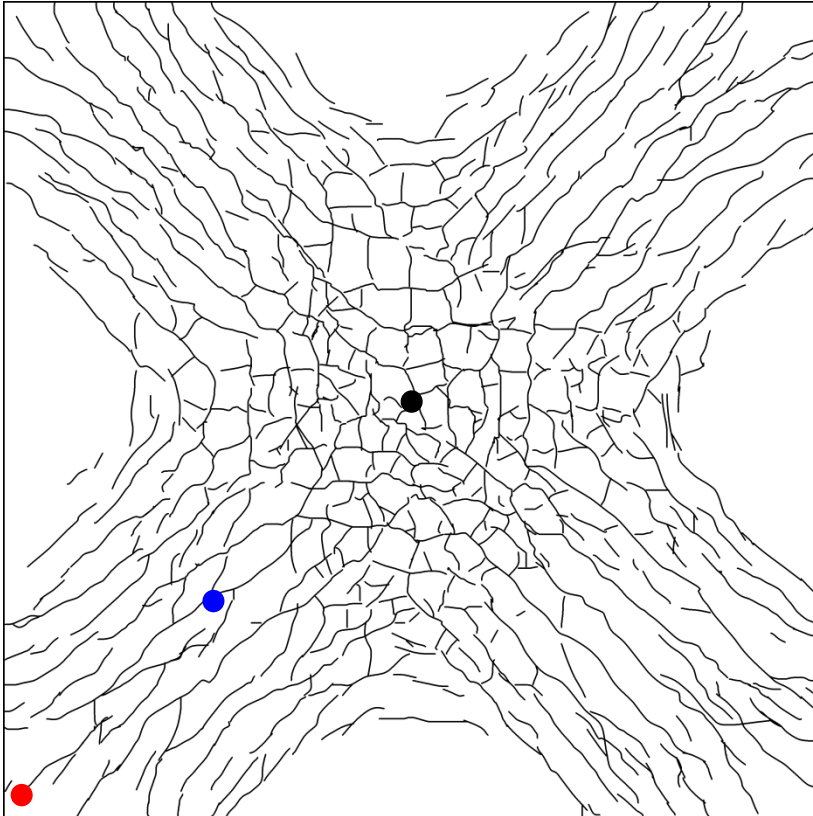
Lasttrin 18000 kg



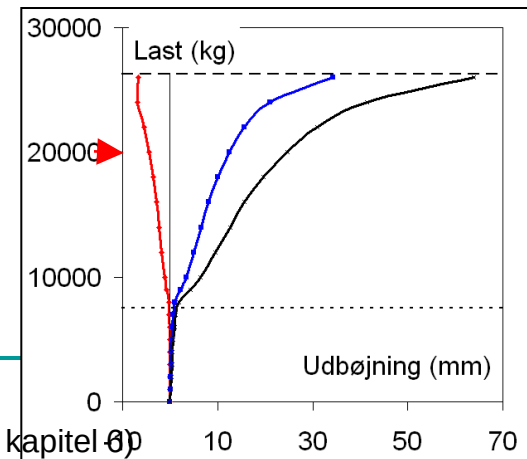
Udbøjninger



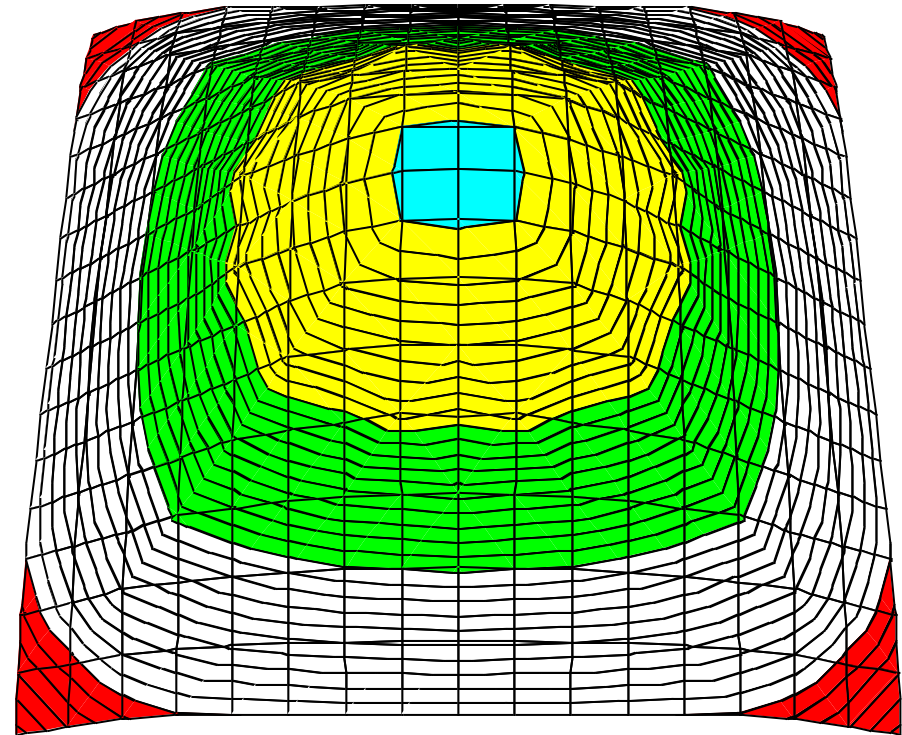
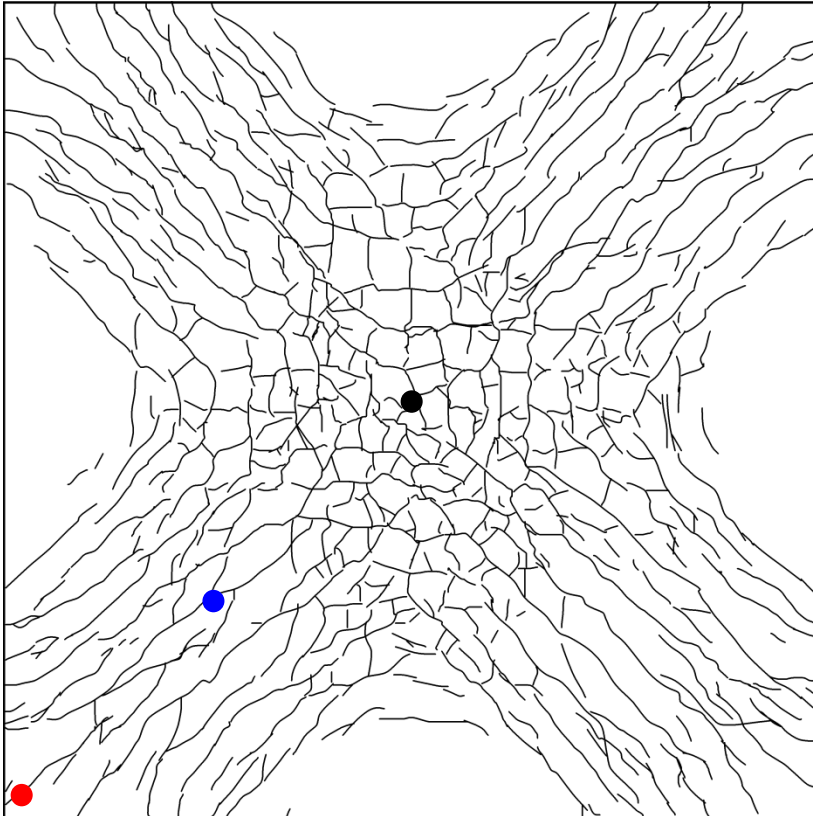
Lasttrin 20000 kg



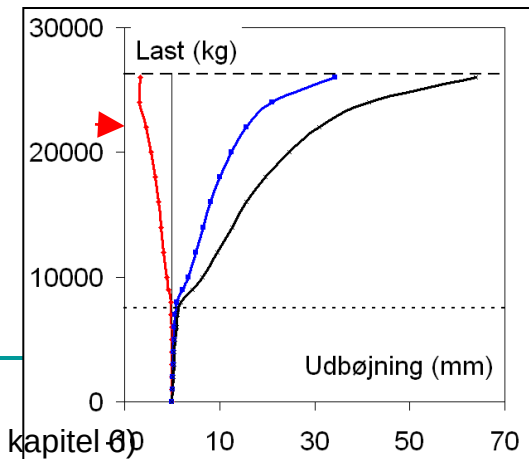
Udbøjninger



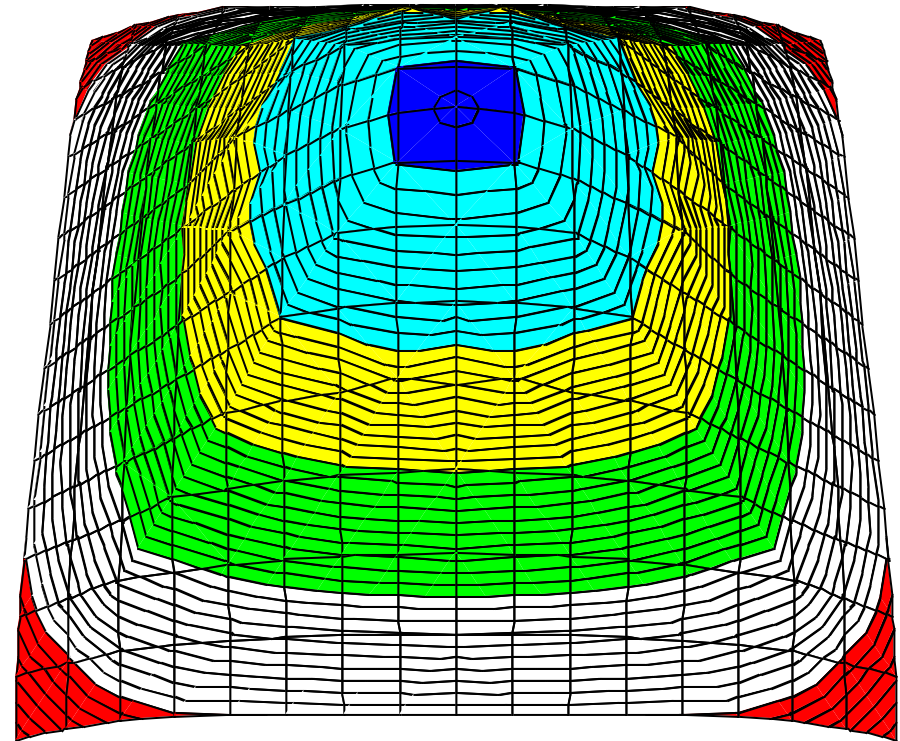
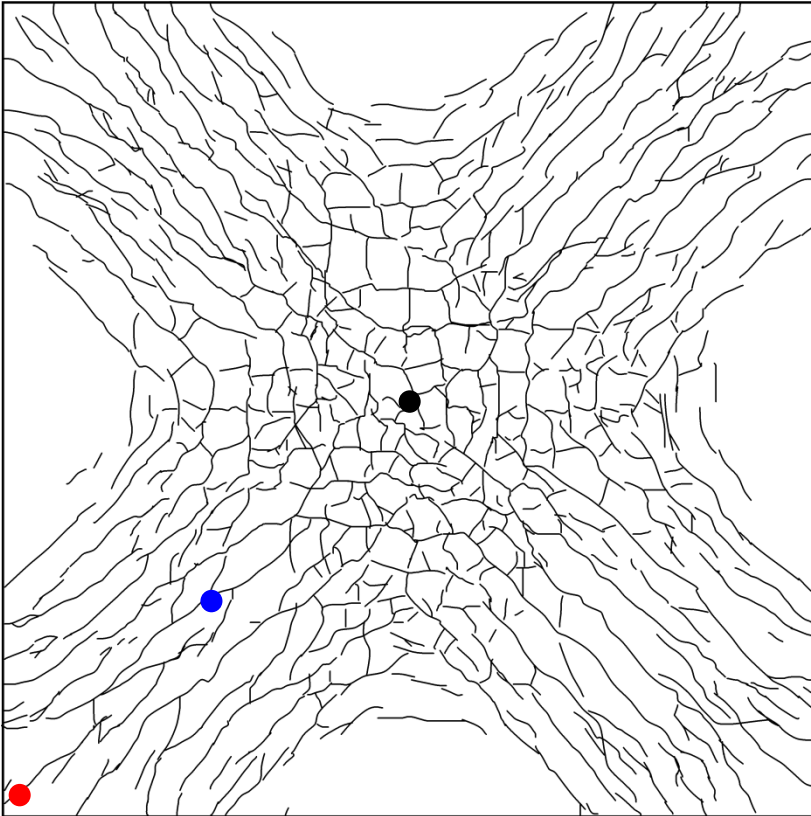
Lasttrin 22000 kg



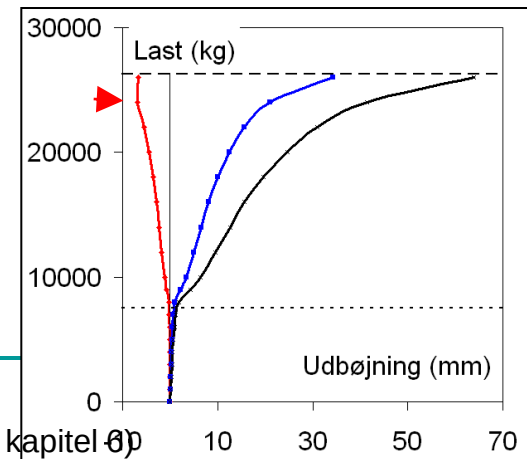
Udbøjninger



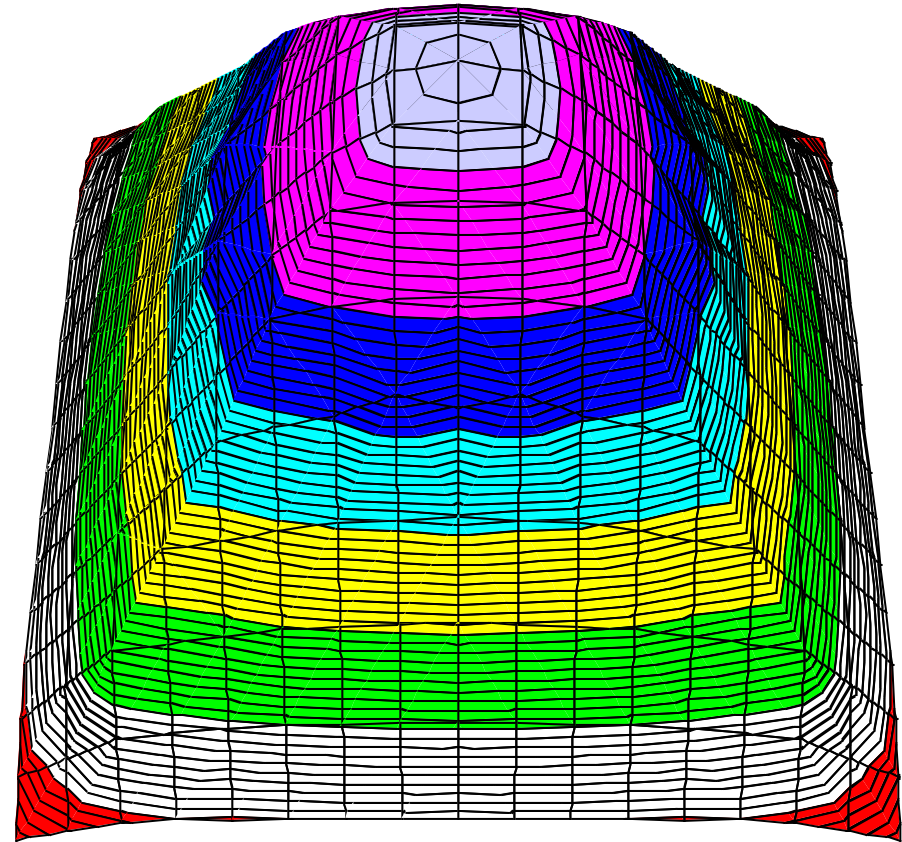
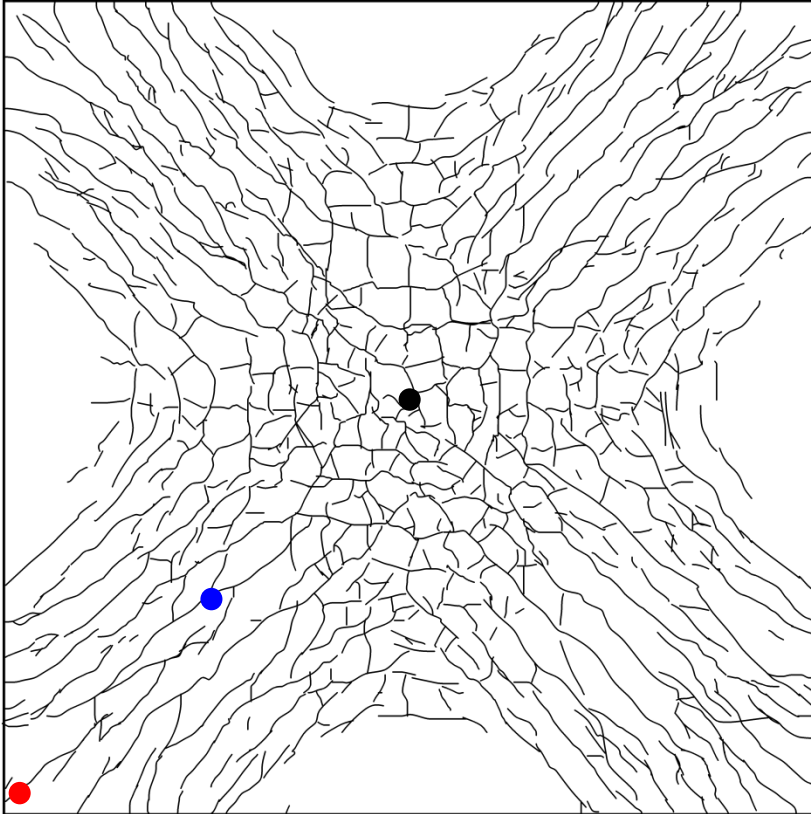
Lasttrin 24000 kg



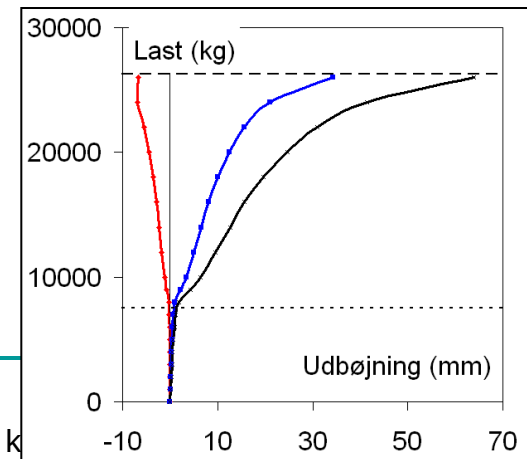
Udbøjninger



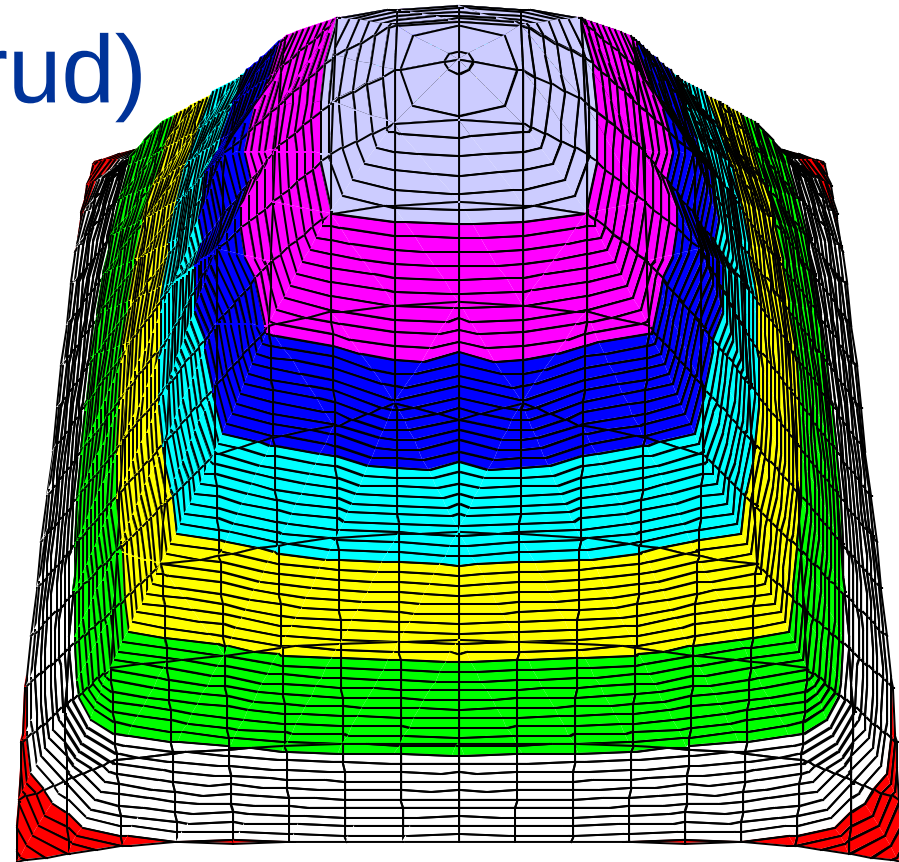
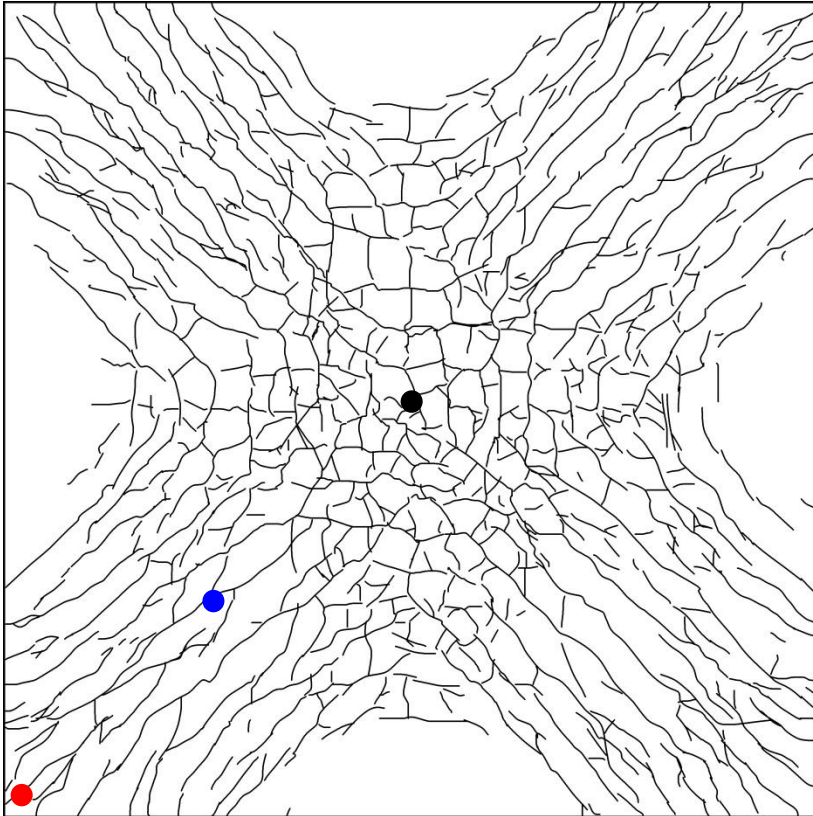
Lasttrin 26000 kg



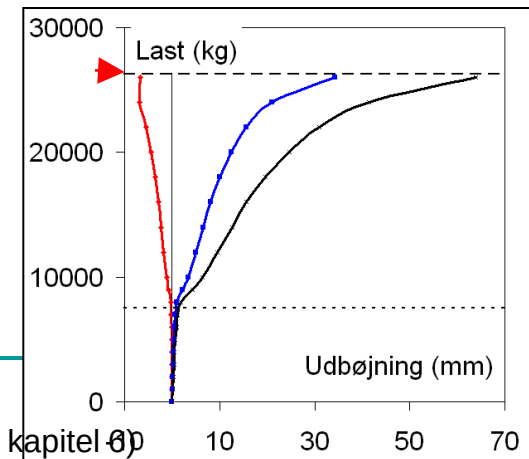
Udbøjninger



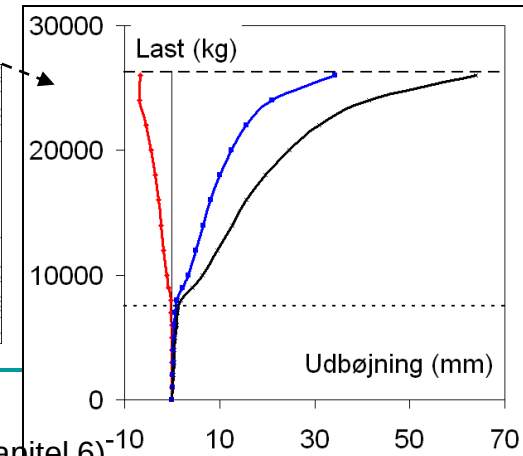
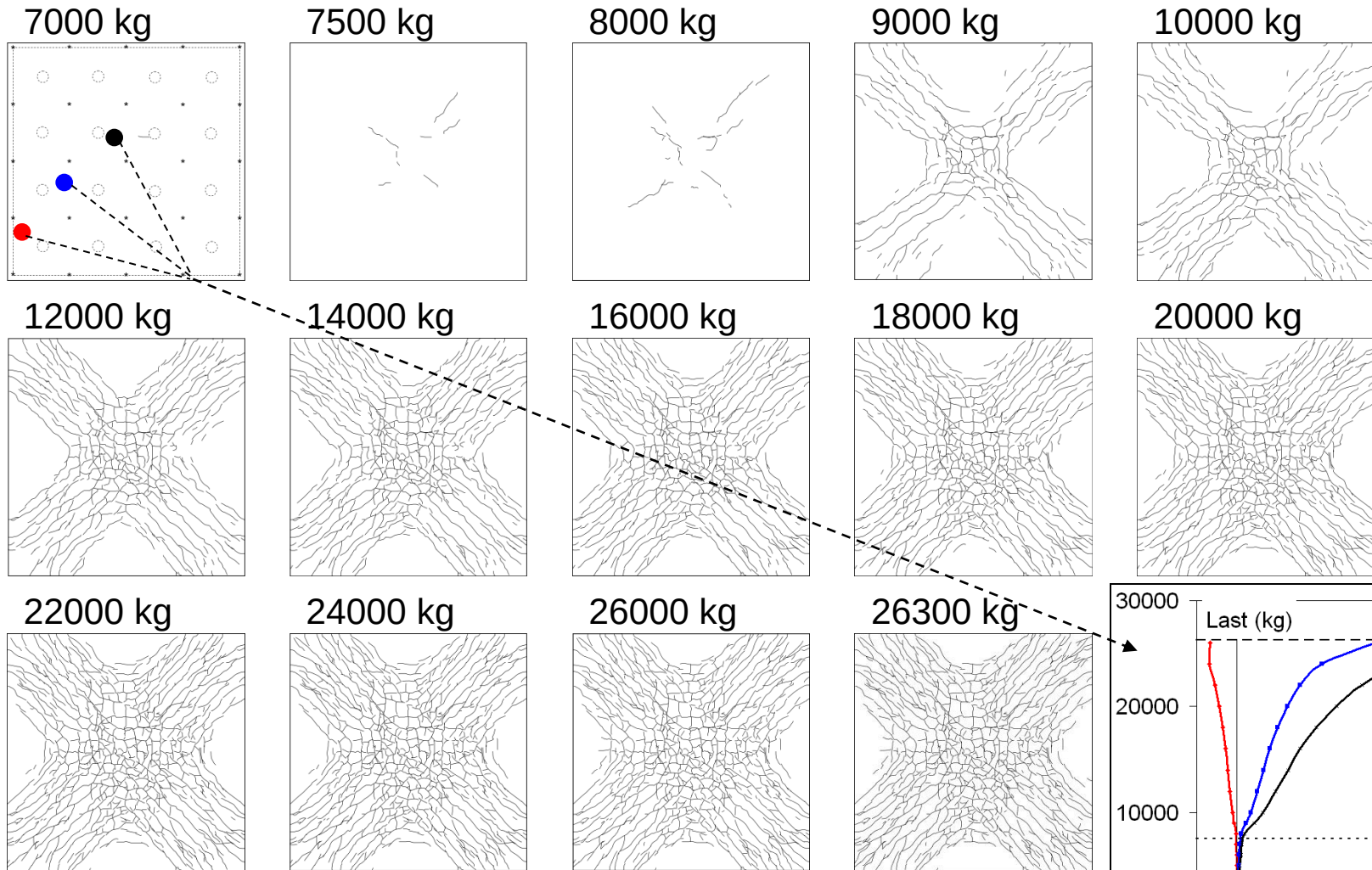
Lasttrin 26300 kg (brud)



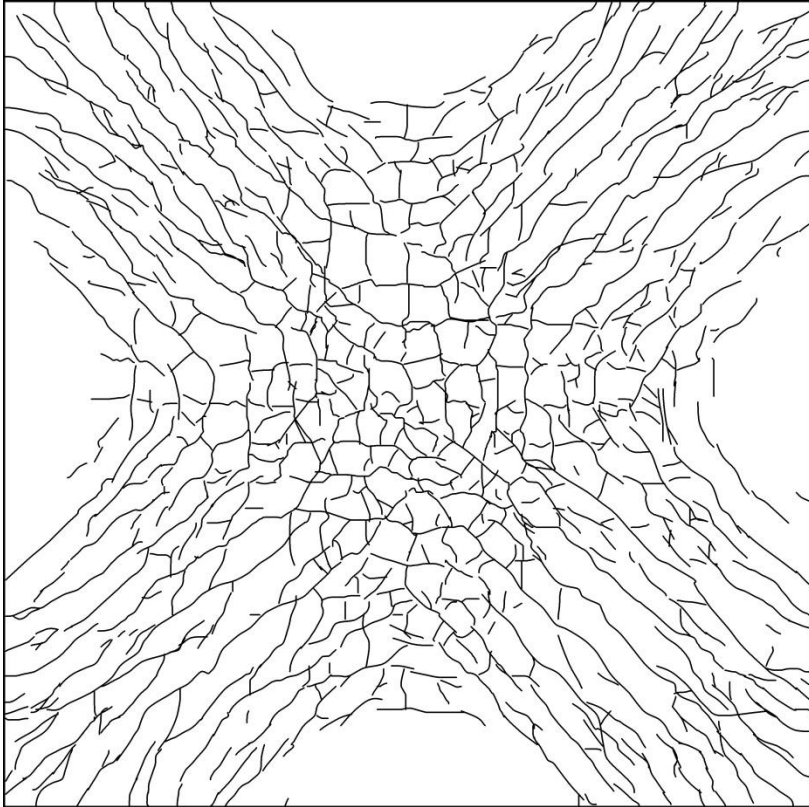
Udbøjninger



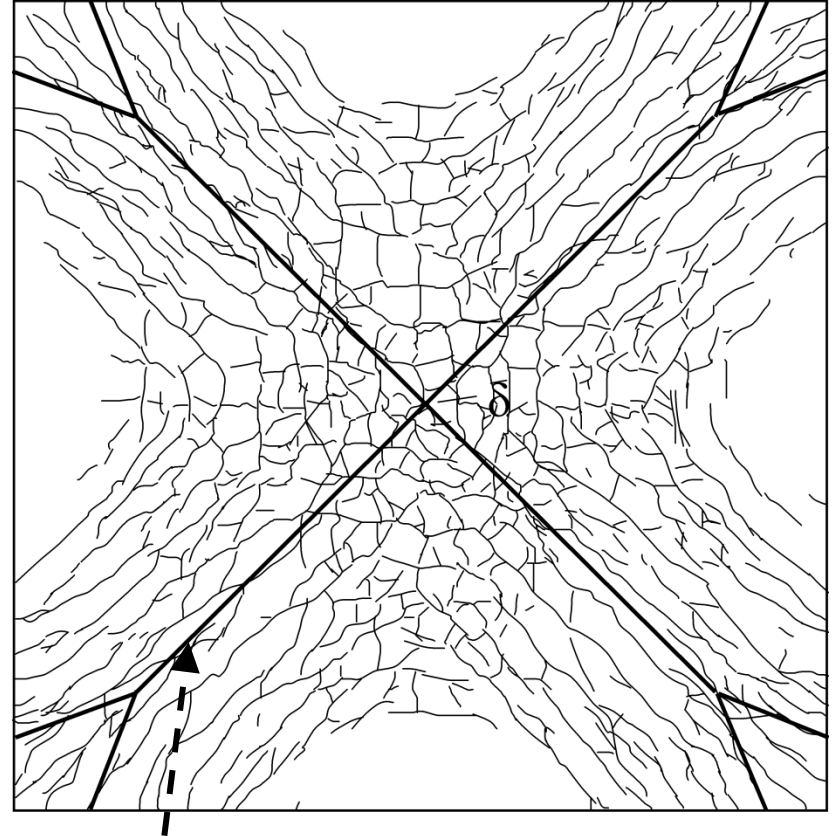
Revnernes udvikling (voksende laste i kg)



Lasttrin 26300 kg (brud)

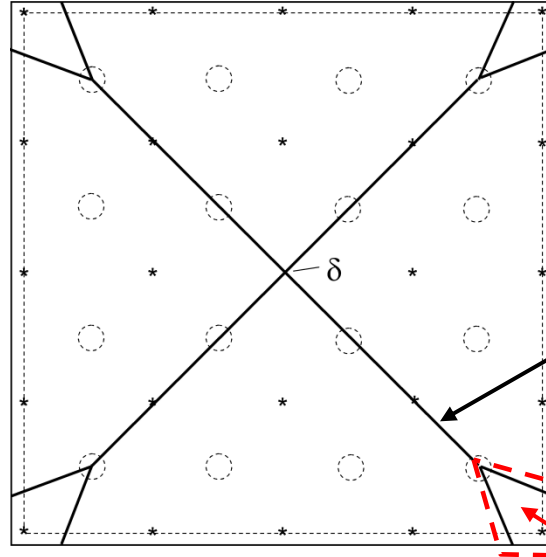
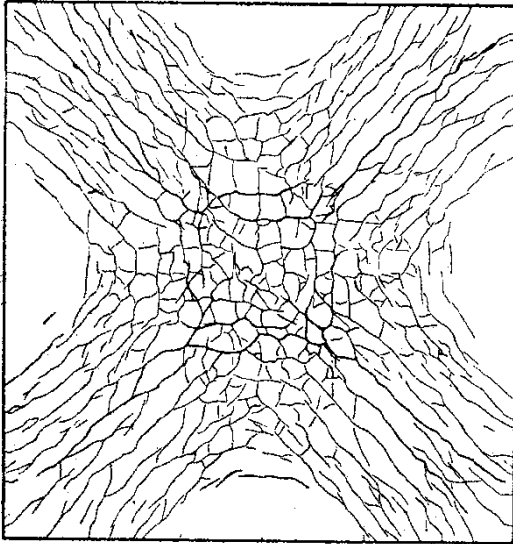


Revner i underside



Brudlinier

Modellering af bruddet (brudlinieteori)



I brudlinieteorien modelleres deformationerne i brudsituationen ved brudlinier, hvori deformationen foregår, således at de enkelte pladedele bevæger sig som stive plader.

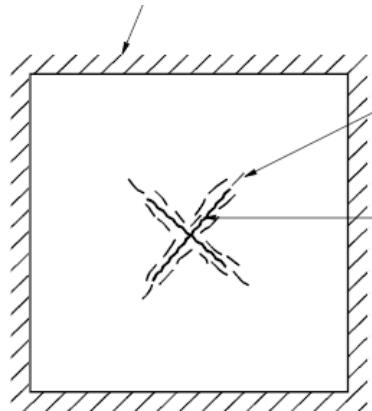
I brudlinieteorien vil man normalt antage at hjørnerne fastholdes: Det øger bæreevnen og forenkler beregningerne – til gengæld skal der altså være armering til at forankre hjørnerne.

Når hjørnerne ikke er fastholdt, vil de vippe op (såkaldte "vippere")

5. Kinematisk mulige brudfigurer

■ -Hvad er en flydelinie/brudlinie?

Simpelt understøttet
kvadratisk plade

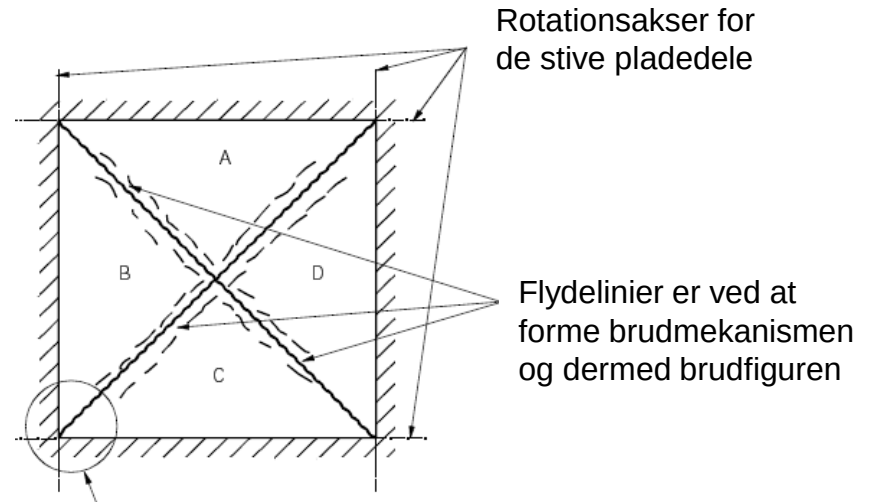


Hård fine revner

Store revner
bredder sig ud fra
midt punkt med
maksimalt moment

Revner i
undresiden

Begyndende flydning af underside-
armeringen i en dobbeltspændt
simpelt understøttet plade



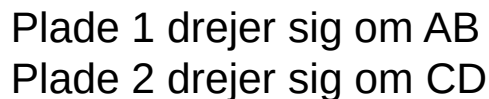
Rotationsakser for
de stive pladedele

Flydelinier er ved at
forme brudmekanismen
og dermed brudfiguren

Omkring hjørner vil flydelinien dog
typisk dele sig i 2 og danne vippere

Dannelsen af en brudmekanisme,
hvor underside armeringen flyder i
de viste flydelinier

- Hvad er en kinematisk mulig brudfigur/brudliniemønster?



I brudlinien er flytningen af et fælles punkt ens $r_1\omega_1=r_2\omega_2$

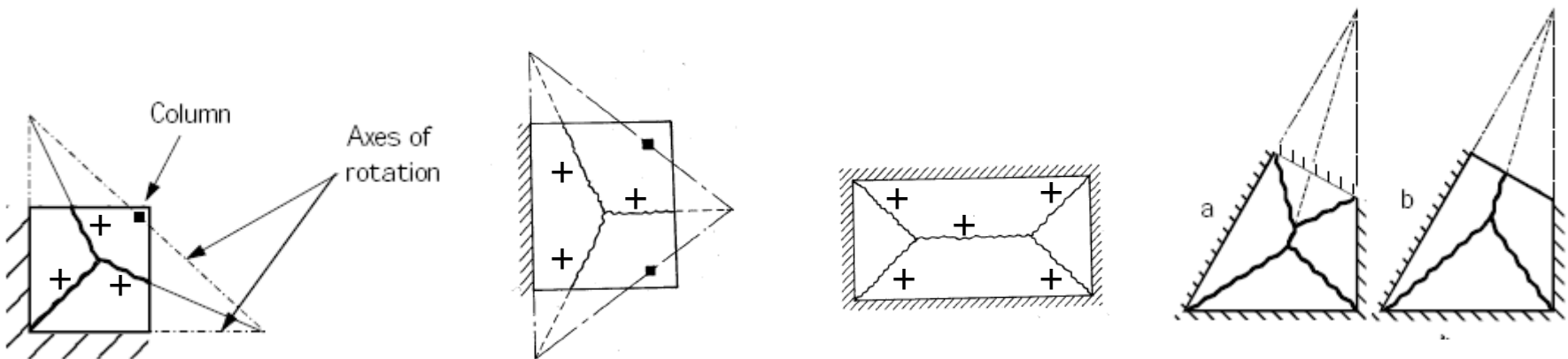
Så brudlinien må ligge på en ret linie gennem rotationsaksernes skæringspunkt O

Betonkonstruktioner - Dobbeltspændte plader - Brudlinieteori (PG, kapitel 6)

Kinematisk mulige brudfigurer

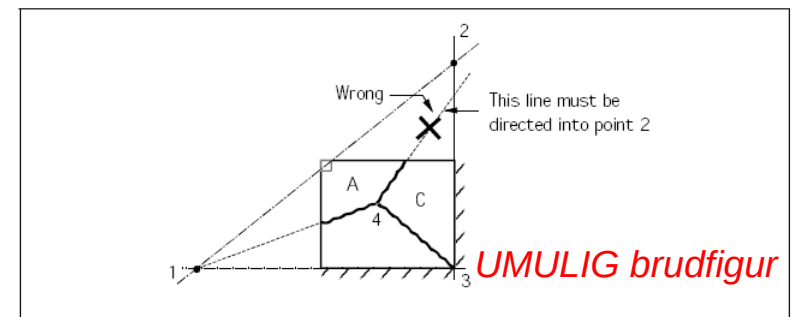
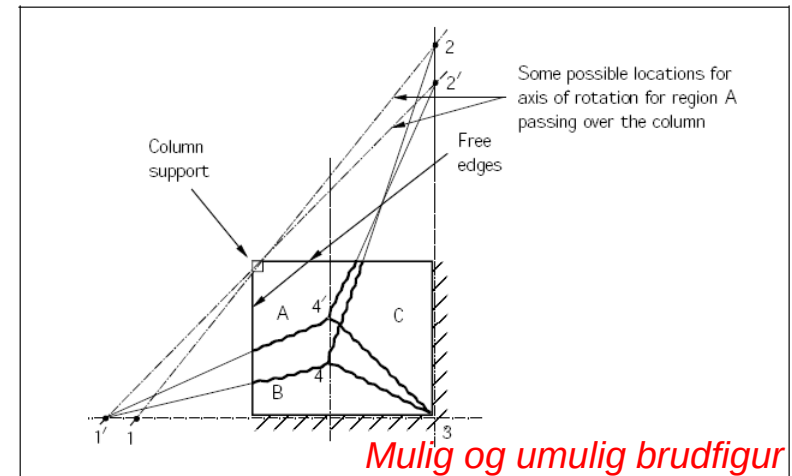
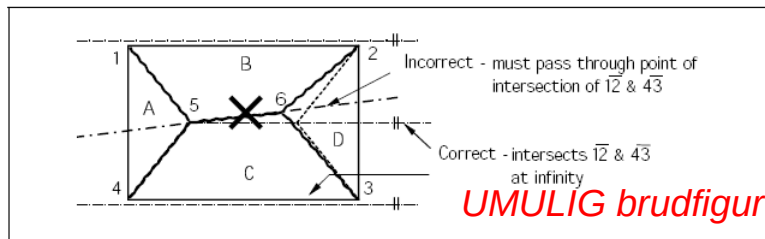
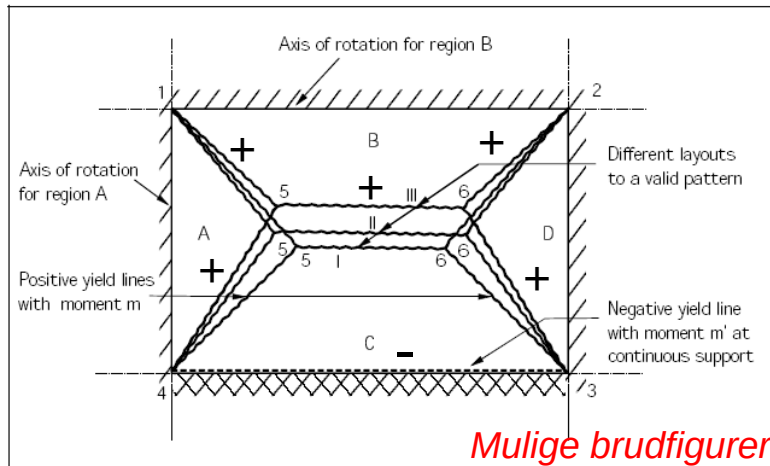
Hvordan vælges et relevant brudliniemønster?

- Brudlinier er rette linier
- En fælles brudlinie mellem 2 pladedele skal ligge på en ret linie, der går gennem rotationsaksernes skæringspunkt.
(linierne kan udarte med skæring i det uendelige ~ parallelle understøtninger)
- Rotationsakser ligger hovedsagelig langs understøtnings linier og går gennem søjleunderstøtningspunkter
- Indspændte rande "afstøder" positive brudlinier og simpelt understøttede rande "tiltrækker" positive brudlinier



Kinematisk mulige brudfigurer

-Hvordan vælges et relevant brudliniemønster?



Marker positive (+) og negative (-) brudlinier

6. Arbejdsmetoden til bestemmelse af øvre værdier

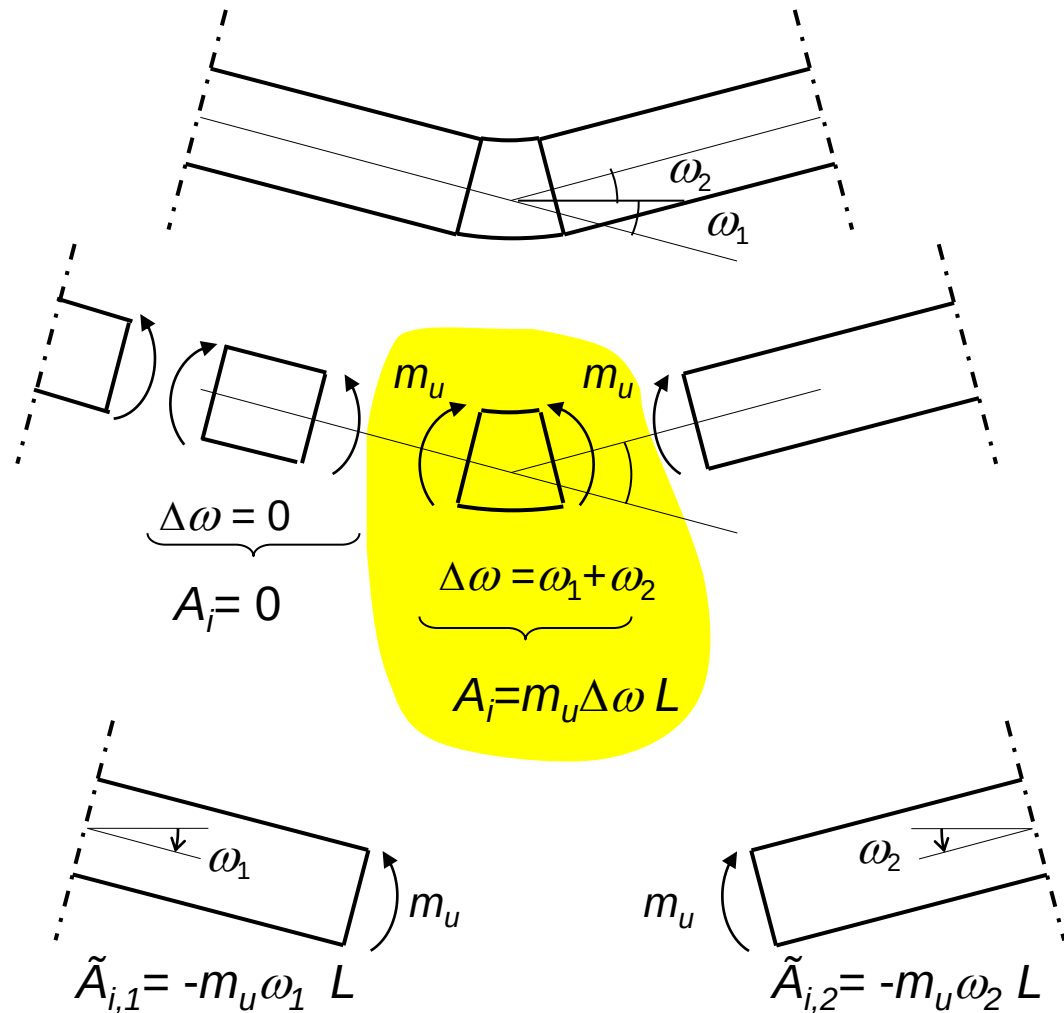
Indre arbejde (i brudlinier)
ækvivaleres med flydesnit-
momenternes arbejde på stive
pladedele

$$A_i = - \sum_p \tilde{A}_{i,p}$$

Det indre arbejde i brudlinier er altid positivt.

Vi tillader os at beregne det ud fra det ækvivalent negative arbejde som momentsnitkræfterne tænkes at udføre på pladedelene.

Men vi er så tvunget til at regne med fortegn !



Arbejdsmetoden til bestemmelse af øvre værdier

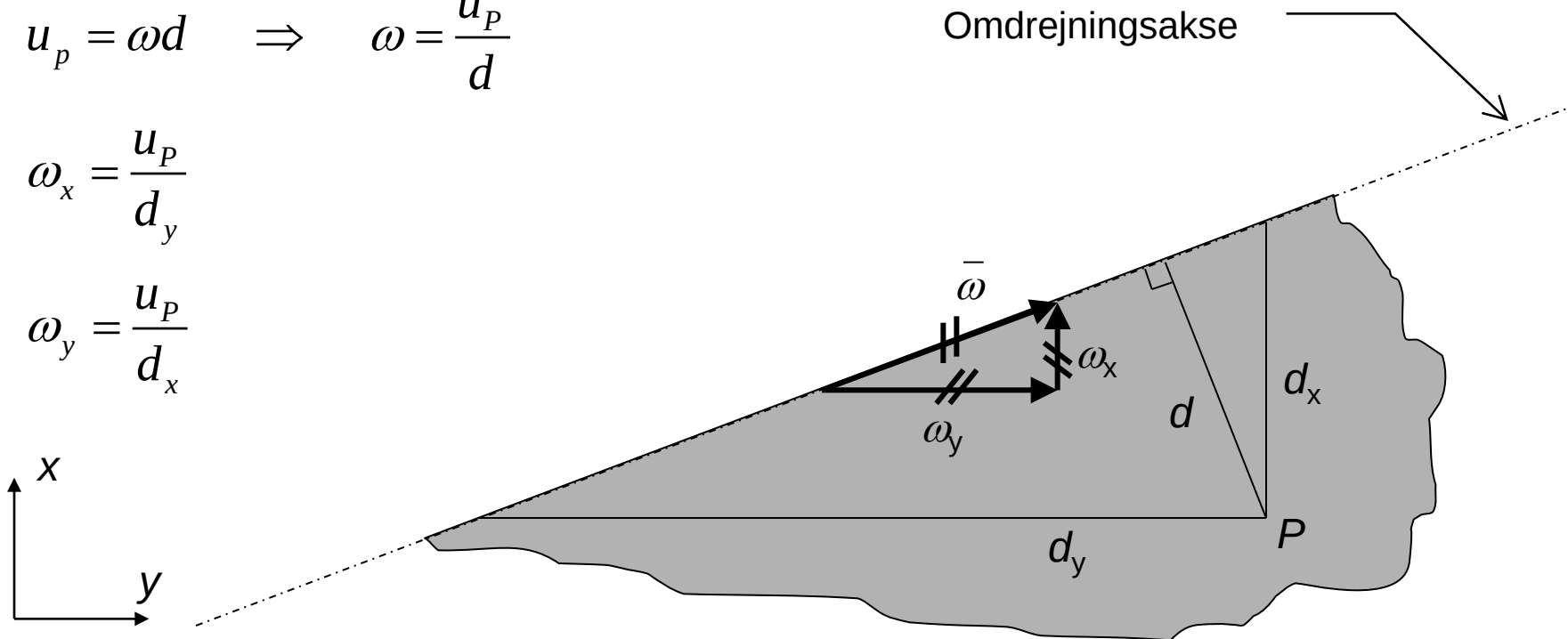
Indre arbejde (i brudlinier) -Ortotrope betonplader

Bestemmelse af vinkeldrejninger ud fra en kendt flytning og en omdrejningsakse

$$u_p = \omega d \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{u_p}{d}$$

$$\omega_x = \frac{u_p}{d_y}$$

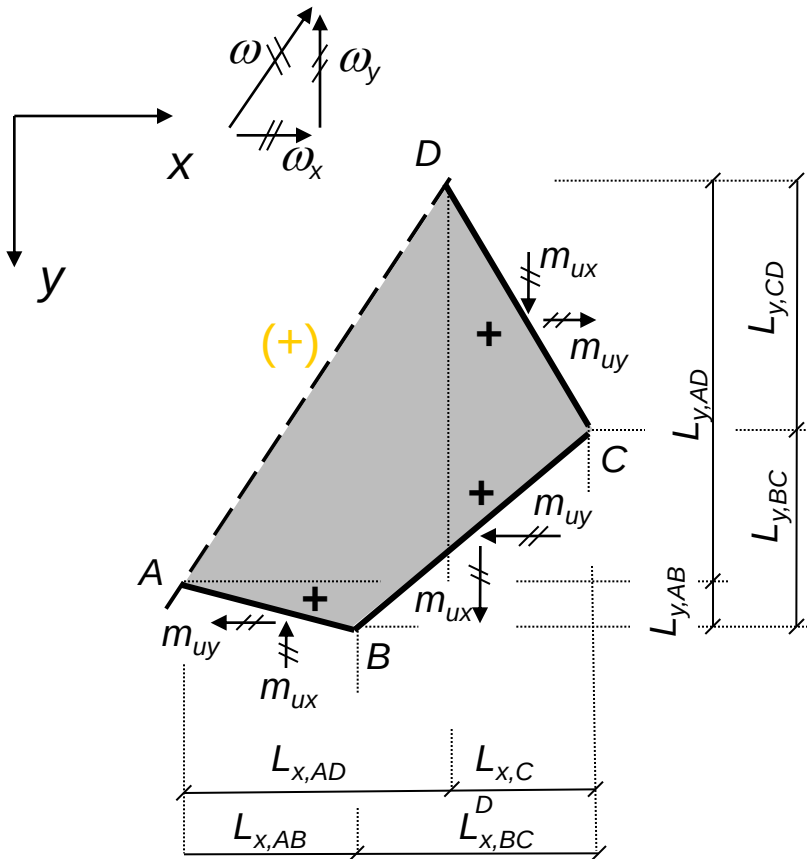
$$\omega_y = \frac{u_p}{d_x}$$



Arbejdsmetoden til bestemmelse af øvreværdier

Indre arbejde (i brudlinier) - Ortotrope betonplader

"Knækkede" brudlinier med samme fortegn $\tilde{A}_{l,ABCD} = -m_y \omega_x (L_{x,AB} + L_{x,BC} - L_{x,CD})$
 $- m_x \omega_y (-L_{y,AB} + L_{y,BC} + L_{y,CD})$
 $= -m_y \omega_x L_{x,AD} - m_x \omega_y L_{y,AD}$

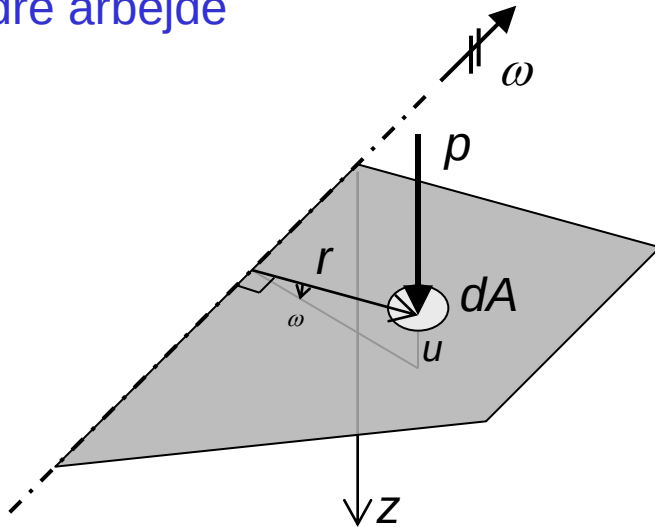


Det ses heraf at det ækvivalente indre arbejde for en "knækket" positiv brudlinie kan beregnes som det indre arbejde langs én positiv brudlinie med længden AD, svarende til afstanden mellem den brudte brudlinies endepunkter.

(Tilsvarende for en negativ brudt brudlinie)

Arbejdsmetoden til bestemmelse af øvreværdier

Ydre arbejde



$$A_{y,p} = \int_A p u dA = \int_A p r \omega dA = P r_0 \omega$$

hvor P er totallasten og r_0 er angrebspunktet.

F.eks ved jævnt fordelt last $\bar{p}$ fås

$$A_{y,p} = \bar{p} A u_0 = \bar{p} A r_0 \omega, \text{ idet } A \text{ er arealet og } r_0 \text{ er tyngdepunktsafstande}$$

Specielt

I flere tilfælde forekommer trekantede pladedele med forskellige flytninger i hjørnerne.

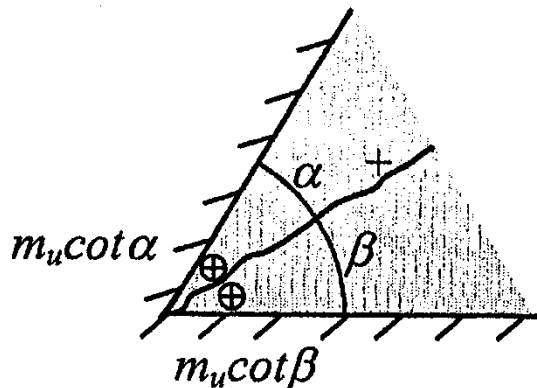
Flytningen u_0 af tyngdepunktet er bestemt ved

$$u_0 = u_1 + \frac{2}{3} \left(\frac{u_2 + u_3}{2} - u_1 \right)$$
$$= \frac{1}{3} (u_1 + u_2 + u_3)$$

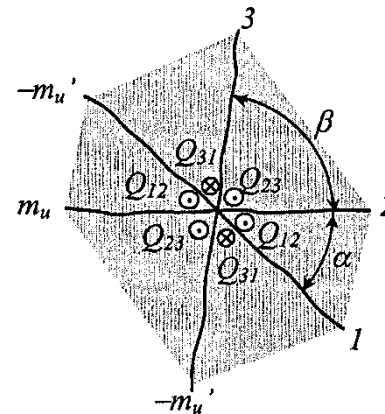
7. Hjørnekræfter

Kirschhoff's randbetingelser siger at der opstår koncentrerede kræfter i pladehjørner.

Dette gælder også ved brudlinieteori og kræver forankring af hjørnerne:

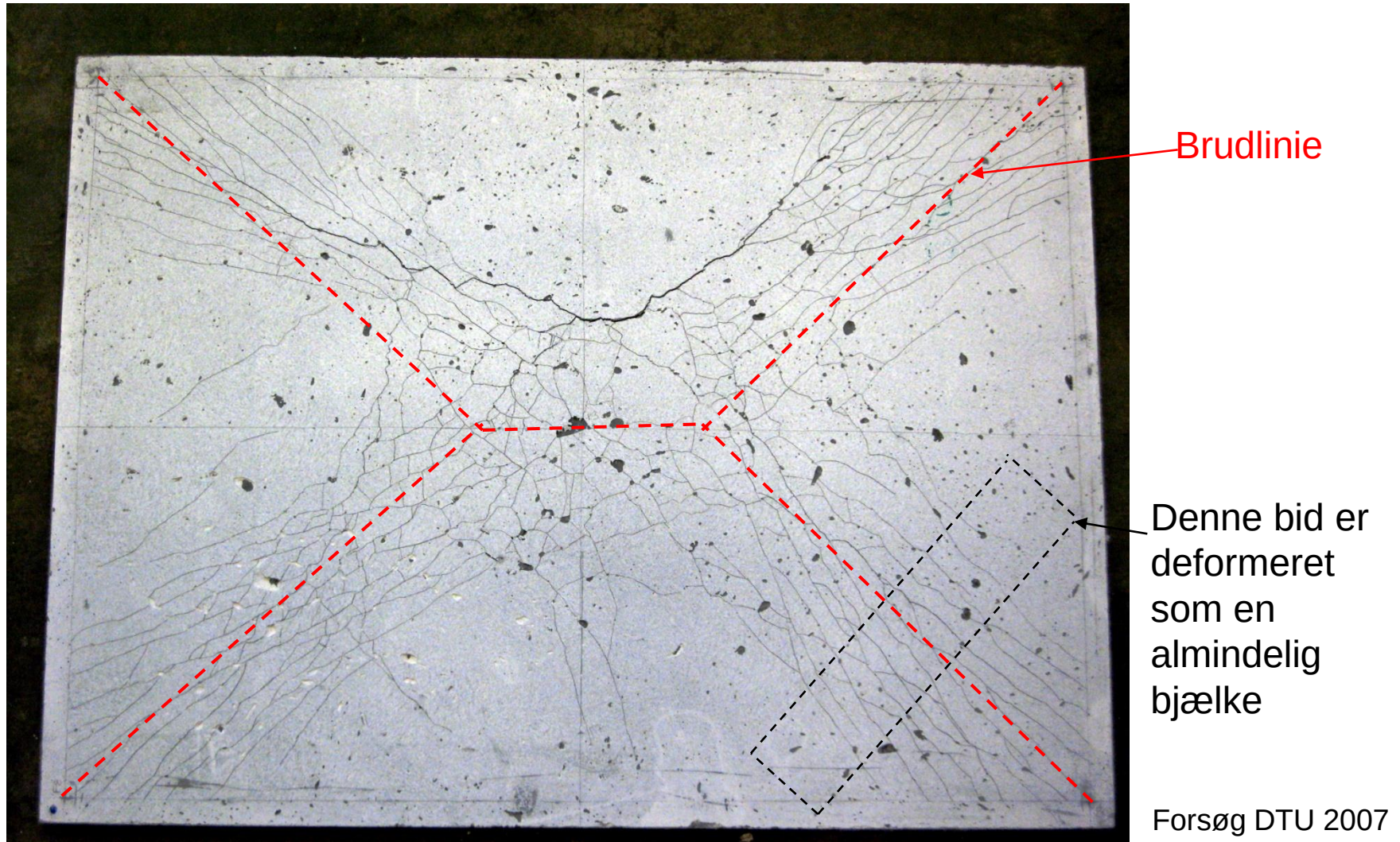


Krydser brudlinier med **forskelligt** fortegn, så opstår der også koncentrerede knudekræfter, der skal overføres:



De koncentrerede kræfter inde i pladen indgår dog **IKKE** i arbejdsligningerne. Det er **IKKE** nødvendigt at kontrollere disse kræfters overføring fra en pladedel til en anden.

8. Brug af brudlinieteorien - eksempel



Brug af brudlinieteorien - eksempel

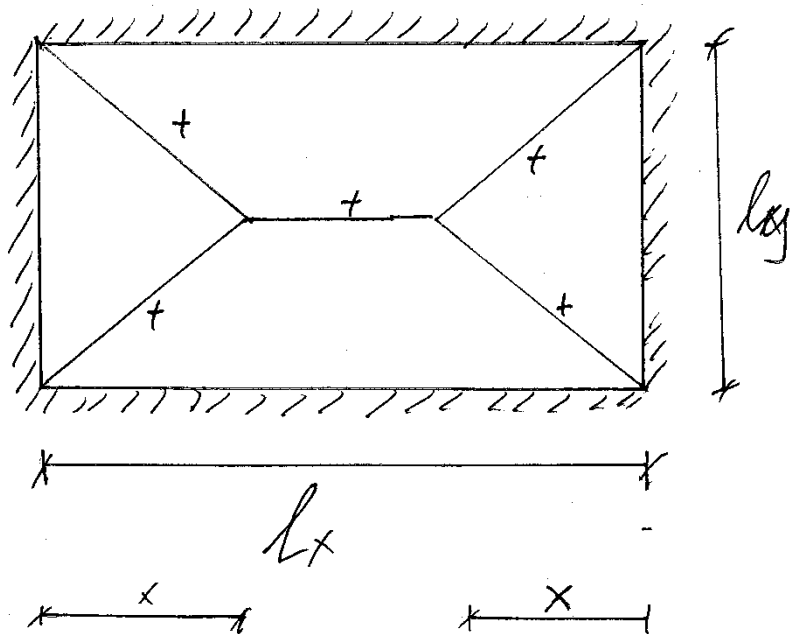


Testbjælker med samme beton og samme tykkelse som pladerne ses tydeligt at minde om almindelige betonbjælker i bøjningsbrud



Brug af brudlinieteorien - eksempel

Vi ser på en simpelt understøttet rektangulær plade, som er armeret ens i begge retninger (brudmoment m_u) og som er belastet med en jævn last p .



Vi antager en brudfigur som vist til venstre – placeringen af linierne er skønnede ud fra symmetri, og da $l_x > l_y$ regner vi med at de skrå brudlinier mødes x inde i pladen.

Brug af brudlinieteorien - eksempel

$$A_y = p \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (2x \cdot l_y) + \frac{1}{2} \cdot l_y \cdot (l_x - 2x) \right)$$

$$A_i = m_u \left(l_y \cdot \frac{2}{x} + l_x \cdot \frac{4}{l_y} \right)$$

$$A_i = A_y \Rightarrow$$

$$2 \cdot \frac{l_y}{x} + 4 \frac{l_x}{l_y}$$

$$p = m_u \cdot \frac{2 \cdot \frac{l_y}{x} + 4 \frac{l_x}{l_y}}{\frac{2}{3} x l_y + l_y \cdot (l_x - 2x)}$$

Vi beregner de ydre og det indre arbejde og finder bæreevnen af arbejdslikevægten.

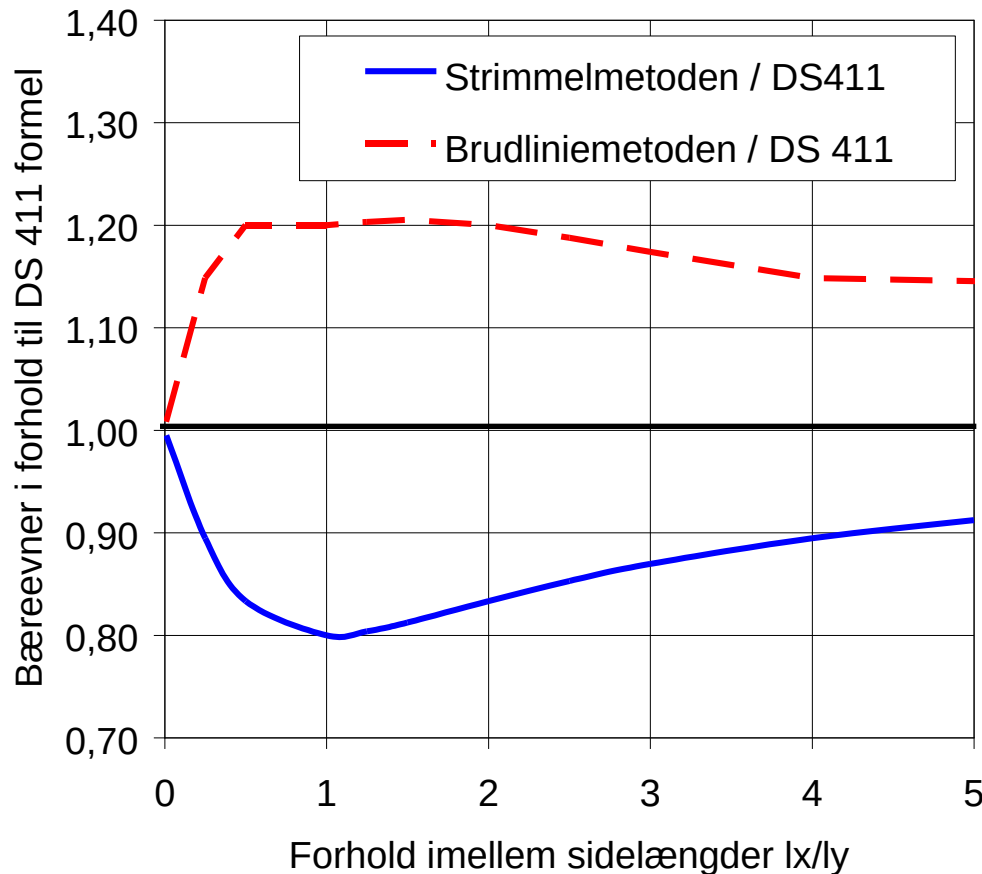
Ved optimering finder vi at den laveste værdi af p optræder nær $x=l_y/2$, hvor p bliver:

Alle værdier af $x < l_x/2$ vil give øvre værdiløsninger, men vi anvender den laveste p fra øvre værdiløsningerne.

$$p = m_u \cdot \frac{24 \cdot \left(1 + \frac{l_x}{l_y}\right)}{l_y \cdot (3 \cdot l_x - l_y)}$$

Sammenligning med nedreværdiløsningerne

Sammenligning for en rektangulær, isotrop plade:



Sammenligner vi de tre metoder:

- 1) Strimmelmetode
- 2) DS 411's metode og
- 3) Brudliniemetoden

så finder vi højere bæreevner ved brud af brudlinieteorien end ved brug af DS 411's metode – hvorimod strimmelmetoden giver den laveste bæreevne.

Korrekt brug af brudlinieløsninger er dog acceptabel.

Slut

Citat fra engelsk publikation:

'Yield line design is so easy

.. once you know what you are doing!'