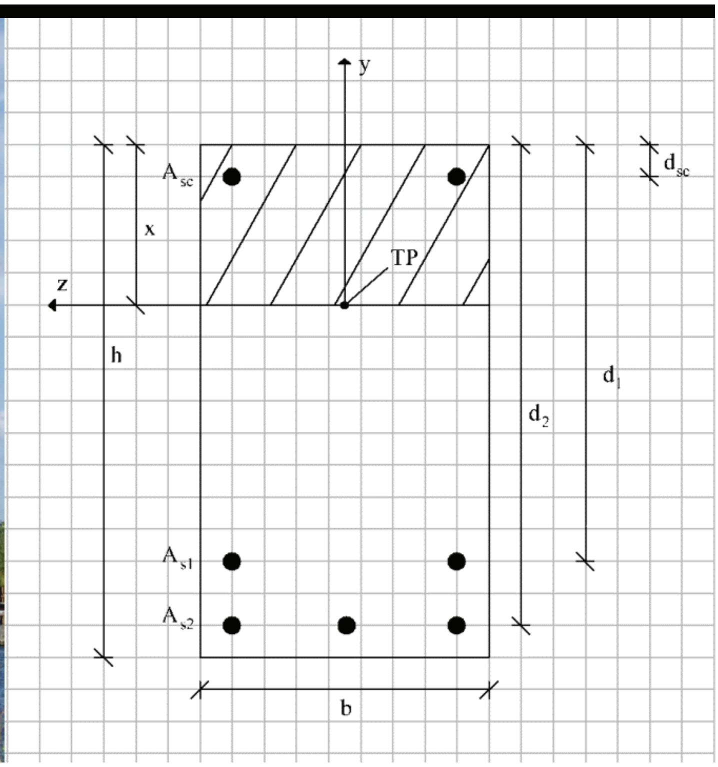
Concrete Structures - Betonkonstruktioner

Kogebog for bestemmelse af tværsnitskonstanter



Per Goltermann

Department of Civil Engineering

2012

DTU Civil Engineering
Department of Civil Engineering

Betonkonstruktioner
Oktober 2012

Kogebog for bestemmelse af tværsnitskonstanter i armeret beton ved REN BØJNING – UDEN NORMALKRAFT

Formål: At hjælpe eller genopfriske studerende på de indledende betonkurser på DTU med at bestemme tværsnitskoefficienter i det symmetriske og armerede betontværsnit udsat for ren bøjning.

Fokus: Der lægges vægt på forståelse, enkelthed og systematik i notatet, som er tænkt som en "kogebog" i hvordan der regnes transformerede arealer, statiske momenter og inertimomenter i armerede betontværsnit med eller uden revner i trækzonen.

Når I først har forstået hvordan man gør og har lidt rutine, så vil I også se at I kan gøre det på andre måder – men indtil da, så er det en ide at følge kogebogen

Notatet er delt i 3 hovedafsnit med hvert sit eksempel:

1. Homogene, urevnede tværsnit (som I kender)
2. Armerede, urevnede tværsnit (som rummer to materialer)
3. Armerede, revnede tværsnit (hvor betonen er revnet i træk)

Bemærk: Formlerne ser anderledes ud i det revnede tværsnit, hvis der er en normalkraft.

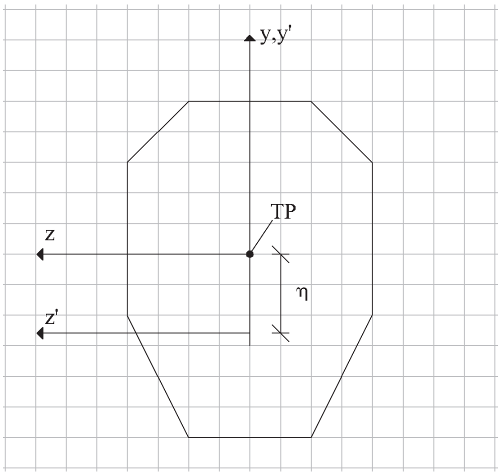
Mine hjælpere: Notatet er gennemlæst af to "forsøgskaniner" og en underviser …. men fejl og mangler er mine.

Nyd jeres nye opskrifter og kog nogle gode tværsnitskonstanter sammen

Per Goltermann
DTU Byg

Oktober 2012

1. Homogene, urevnede tværsnit



Figur 1. Enkeltsymmetrisk tværsnit (TP=tyngdepunkt)

Ved beregning af en enkeltsymmetrisk tværsnit som vist på figur 1 definerer vi arealet A, det statiske moment S og intertimomentet I som

$$A = \int dA \quad S = \int y dA \quad I = \int y^2 dA$$

Tyngdepunktet i et tværsnit findes ved at sætte S=0.

<u>Forskydning af den akse, der tages moment om</u>

Udføres der beregning om en anden akse (z'), som ligger η under tyngdepunktsaksen, så beregnes det statiske moment S' og intertimomentet I' om denne akse som

$$S' = \eta \cdot A \quad I' = I + \eta^2 \cdot A$$

<u>Beregning på et sammensat tværsnit</u>

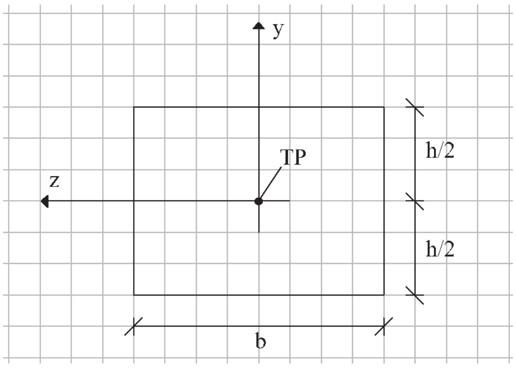
Er tværsnittet komplekst med en z-akse stykket x under tværsnittets top, så kan det opdeles i flere simple dele som vist i eksempel 1 og derefter kan A, S og I beregnes som summen af bidragene fra de enkelte dele:

$$A = \sum A_i \quad S(x) = \sum \eta_i A_i \quad I(x) = \sum I_i + \eta_i^2 A_i$$

<u>De enkelte deles bidrag.</u>

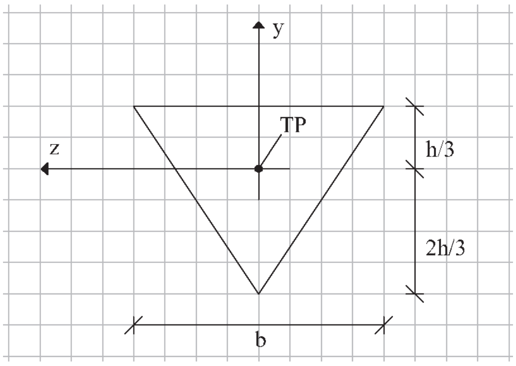
Alle tværsnit – selv de mest komplicerede – kan opdeles i en række simple dele, fx i rektangler og trekanter, som stort set kan dække alle tværsnitsudformninger. De sidste tværsnitstyper kan normalt dækkes af cirkler, cirkelstykker, eller andre simple geometriske figurer.

Bidragene til areal, statisk moment og inertimoment kan man integrere sig frem til – eller slå op i Teknisk Ståbi. Teknisk Ståbi angiver for rektangler og ligebenede trekanter



$$A = bh$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3$$

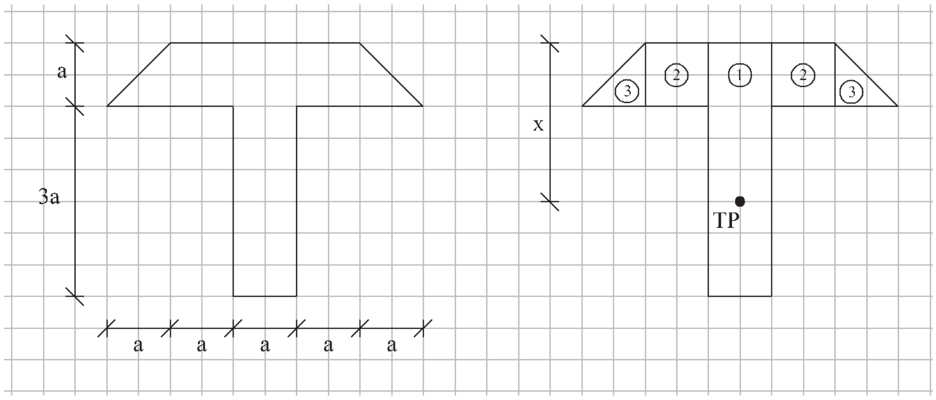


$$A = bh$$

$$I = \frac{1}{36} bh^3$$

I det efterfølgende prøver vi at udlede formler og lave beregninger for lidt forskellige tværsnit i forskellige situationer.

Eksempel 1. Et sammensat tværsnit



Figur 2. Sammensat tværsnit – opdeling markeret til højre

Det sammensatte tværsnit i figur 2 opdeles i tre grupper af dele, som er simple rektangler eller ligebenede trekanter, hvor jeg nemt kan finde arealer, statiske momenter og intertimomenter som

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 = 4a^2 + 2a^2 + a^2 = 7a^2$$
$$S(x) = \sum \eta_i A_i = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3$$
$$\eta_1 = (x - \frac{4}{2}a) \quad \eta_2 = (x - \frac{a}{2}) \quad \eta_3 = (x - \frac{2}{3}a)$$
$$S(x) = (x - \frac{4}{2}a)4a^2 + (x - \frac{a}{2})2a^2 + (x - \frac{2}{3}a)a^2$$
$$S(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{29}{21}a \approx 1{,}3810a$$

Jeg har her udnyttet, at det statiske moment om hver dels tyngdepunkt er nul (S_i=0) og kan så beregne det samlede statiske moment som summen af delarealerne gange deres afstand til det samlede tværsnits tyngdepunkt. Jeg har derefter brugt en ligningsløser til at bestemme, at x=29/21·a giver S=0 for det sammensatte tværsnit, og at det samlede tværsnits tyngdepunkt dermed er 29/21·a under toppen af tværsnittet.

Jeg finder nu inertimomentet af det sammensatte tværsnit som summen af bidragene fra de tre grupper af dele, dvs. den enkelte dels inertimoment om dens tyngdepunkt plus dens areal gange flytningen i anden

$$I(x) = \sum I_i + \eta_i^2 A_i = (I_1 + \eta_1^2 A_1) + (I_2 + \eta_2^2 A_2) + (I_3 + \eta_3^2 A_3)$$
$$= (\frac{1}{12}a \cdot (4a)^3 + 4a^2(x - \frac{4}{2}a)^2) + (\frac{1}{12}2a \cdot (a)^3 + 2a^2(x - \frac{1}{2}a)^2) + (\frac{1}{36}2a \cdot a^3 + a^2(x - \frac{2}{3}a)^2)$$
$$= 9{,}1508a^4$$

2. Armeret profil, urevnet tilstand

Beregningen af areal A, statisk moment S og inertimoment I sker på samme måde som det homogene tværsnit, blot skal vi tage hensyn til at armering og beton har forskellige stivheder, dvs forskellig E-moduler (E_c for beton og E_s for armeringen).

Ved beregningerne vælger vi 1) altid at ignorere armeringsstængernes inertimoment om deres egen akse, da dette inertimoment er meget lille, 2) at sætte betonens areal til hele bjælkens tværsnitsareal fordi det er det beregningsmæssigt nemmeste at regne med og 3) at kompensere for at vi tager armeringsstængernes areal med under betonbidraget og vi ganger derfor kun armeringsarealet med α-1, hvor

$$\alpha = E_s / E_c$$

Vi finder nu

$$EA = \sum E_i A_i = E_c A_c + E_s A_s = E_c A_T \Rightarrow$$

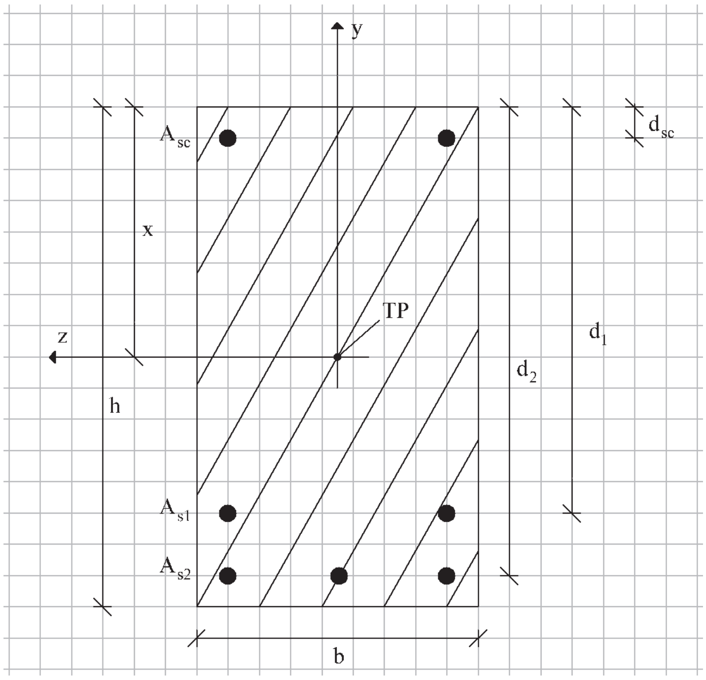
$A_T = A_c + (\alpha - 1) A_s$ hvor vi har sat A_c til at være hele tværsnittets areal (det er nemmest)

Tilsvarende beregner vi det samlede statiske moment og inertimoment om en akse, placeret stykket x under toppen af tværsnittet som

$$S_T(x) = S_c(x) + (\alpha - 1) S_s(x)$$
$$I_T(x) = I_c(x) + (\alpha - 1) I_s(x)$$

Tyngdepunktets placering findes som før ved at sætte $S_T(x)=0$

Eksempel 2. Et armeret, rektangulært tværsnit i urevnet tilstand.



Figur 3. Armeret tværsnit i urevnet tilstand

Her beregner vi ligesom i det tidligere afsnit

$$A_T = A_c + \alpha A_s = bh + (\alpha - 1)(A_{sc} + A_{s1} + A_{s2})$$
$$S_T(x) = bh \cdot \eta_c + (\alpha - 1)(A_{sc}\eta_{sc} + A_{s1}\eta_{s1} + A_{s2}\eta_{s2})$$
$$\eta_c = x - h/2 \quad \eta_{sc} = x - d_{sc} \quad \eta_{s1} = x - d_1 \quad \eta_{s2} = x - d_2 \Rightarrow$$
$$S_T(x) = bh(x - h/2) + (\alpha - 1)(A_{sc}(x - d_{sc}) + A_{s1}(x - d_1) + A_{s2}(x - d_2)) = 0 \Rightarrow x$$
$$I_T(x) = I_c + A_c\eta_c^2 + (\alpha - 1)(I_{sc} + A_{sc}\eta_{sc}^2 + I_{s1} + A_{s1}\eta_{s1}^2 + I_{s2} + A_{s2}\eta_{s2}^2)$$
$$= \frac{1}{12}bh^3 + bh(x - h/2)^2 + (\alpha - 1)(A_{sc}(x - d_{sc})^2 + A_{s1}(x - d_1)^2 + A_{s2}(x - d_2)^2)$$

Vi ignorerer således I_{sc}, I_{s1} og I_{s2} fordi det er på den sikre side og fordi de bidrag er meget små i forhold til de øvrige led.

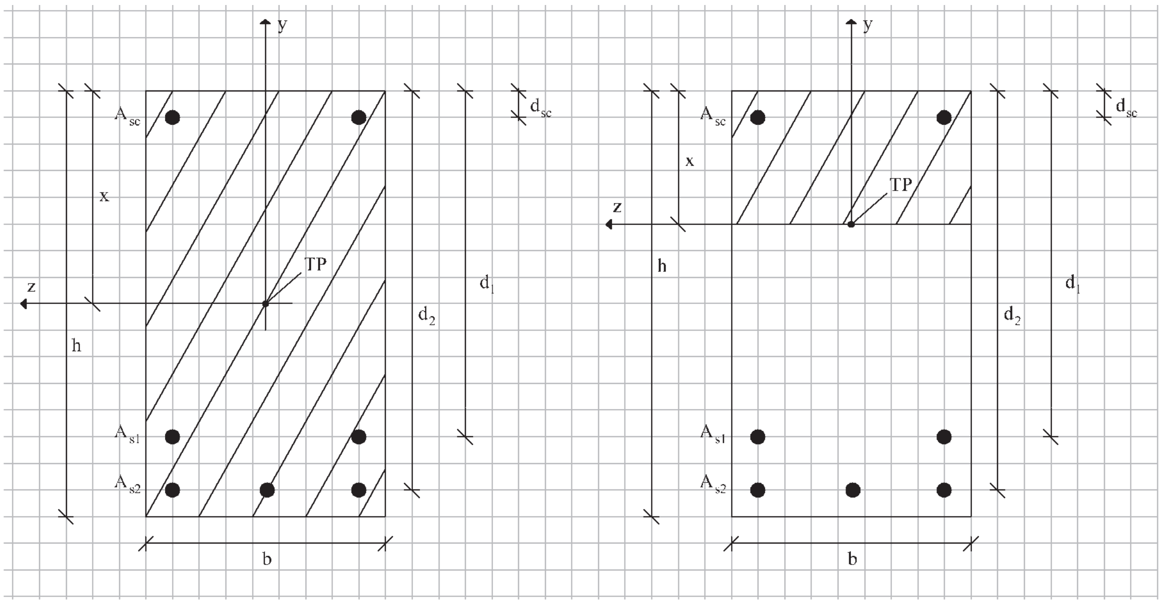
Anvender vi et tværsnit med h=500 mm, b=250 mm, som er armeret med A_{sc} = 2Ø12, A_{s1}=2Ø24 og A_{s2}= 3Ø24, med målene d_{sc}=45mm, d_1=415mm, d_2=455mm og α=30, så finder vi

$$x = 306{,}1mm$$
$$I_t = 4{,}63 \cdot 10^9\,mm^4$$

3. Armeret tværsnit, revnet tilstand

Ved beregning af det revnede tværsnit ignoreres al betonen i trækzonen, dvs. beregningerne ligner beregningerne for det urevnede tværsnit, blot 1) ignoreres den del af betonen der er i træk og 2) armeringen ganges med α-1, når den ligger i trykzonen, men 3) armeringen ganges med α, når den ligger i den revnede trækzone.

Eksempel 3. Et armeret, rektangulært tværsnit i revnet tilstand.



Figur 4. Urevnet tværsnit (t.v.) og revnet tværsnit (t.h.).
Den del af betontværsnittet, der tages med i beregningerne er skraveret

Her beregner vi ligesom i det tidligere afsnit, det den eneste forskel er at vi kun regner betonen med i trykzonen, som går x ned

$$A_T = A_c + (\alpha - 1)A_{sc} + \alpha A_s = bx + (\alpha - 1)A_{sc} + \alpha A_{s1} + \alpha A_{s2})$$
$$S_T(x) = bx(x - x/2) + (\alpha - 1)A_{sc}(x - d_{sc}) + \alpha A_{s1}(x - d_1) + \alpha A_{s2}(x - d_2) = 0 \Rightarrow x$$
$$I_T(x) = I_c + bx(x - x/2)^2 + (\alpha - 1)(I_{sc} + A_{sc}(x - d_{sc})^2) + \alpha(I_{s1} + A_{s1}(x - d_1)^2) + \alpha(I_{s2} + A_{s2}(x - d_2)^2)$$
$$= \frac{1}{12}bx^3 + bx(x - x/2)^2 + (\alpha - 1)A_{sc}(x - d_{sc})^2 + \alpha A_{s1}(x - d_1)^2 + \alpha A_{s2}(x - d_2)^2)$$

Anvender vi samme tværsnit som i eksempel 2 med h=500 mm, b=250 mm, som er armeret med A_{sc} = 2Ø12, A_{s1}=2Ø24 og A_{s2}= 3Ø24, med målene d_{sc}=45mm, d_1=415mm, d_2=455mm og α=30, så finder vi

$$x = 276,2mm$$
$$I_t = 3,93 \cdot 10^9 mm^4$$

DTU Civil Engineering
Department of Civil Engineering
Technical University of Denmark

Brovej, Building 118
DK 2800 Kgs. Lyngby
Telephone +45 45 25 17 00

www.byg.dtu.dk