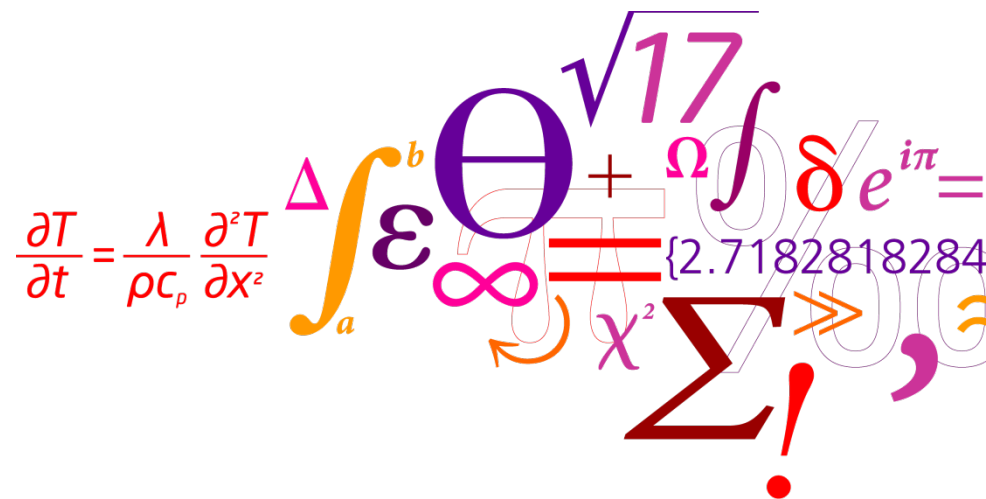


Søjler og vægge

Centralt og excentrisk belastede

Per Goltermann


$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
$$\int_a^b \epsilon \Theta^{\sqrt{17}} + \Omega \int \delta e^{i\pi} = \{2.7182818284\}$$
$$\Delta \int_a^b \epsilon \Theta^{\sqrt{17}} + \Omega \int \delta e^{i\pi} = \{2.7182818284\}$$
$$\chi^2 \Sigma!$$

Søjler: De små og ret almindelige



Søjler i
kontorbyggeri
(bygning 101).



Søjler under bro
(Skovdiget).

Præfab
væg-
elementer
i boligblok



Søjler: De helt store og specielle



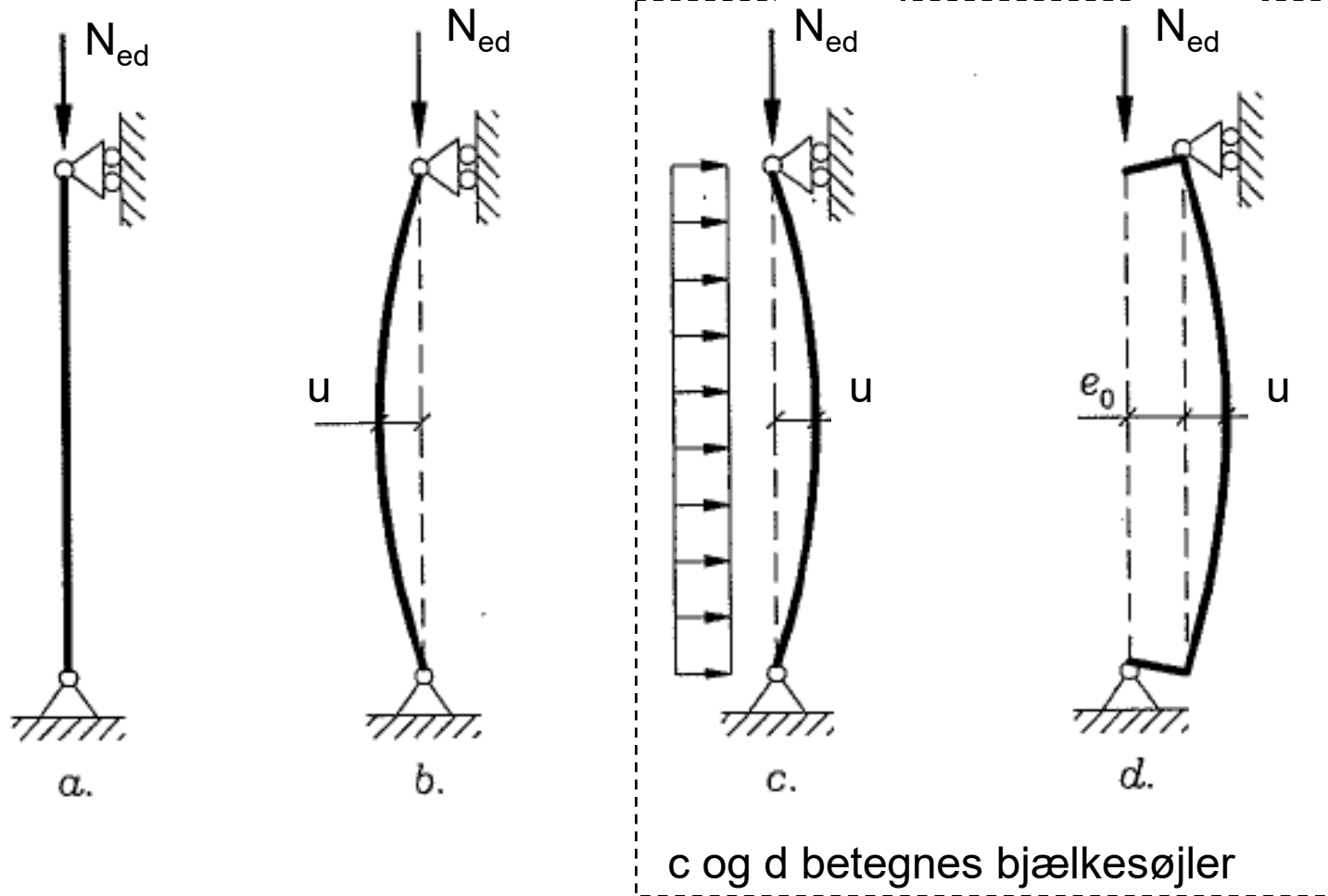
Pyloner, Øresundsbroen



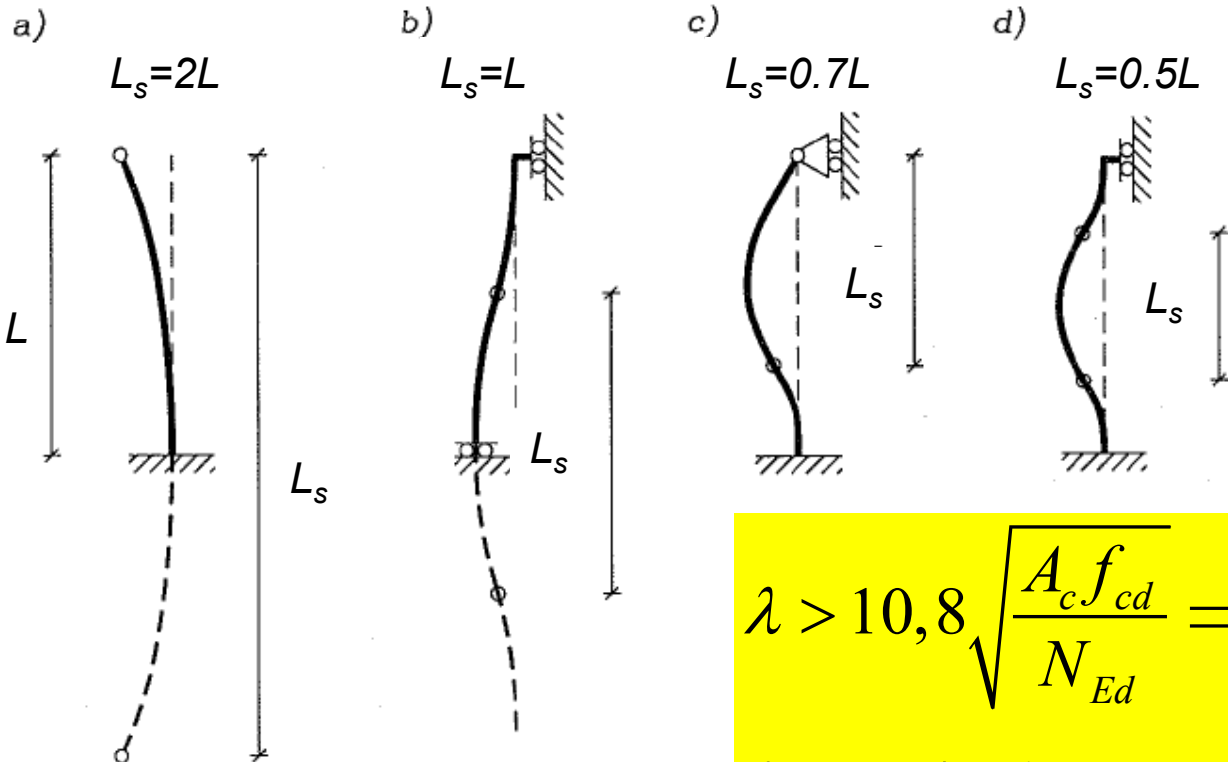
Turning Torso, Malmö
(bolig og kontorbyggeri)

1. Søjler og søjlelængder Session B11
2. Centralt belastet søjle i husbygning
3. Centralt belastet søjle uden armering
4. Centralt belastet søjle med armering
5. Excentrisk belastede vægge uden armering
6. Excentrisk og tværbelastede søjler.
7. Biaxial bøjning Session B12

1. "Simple" søjler



Fri søjlelængde L_s



$$\lambda > 10,8 \sqrt{\frac{A_c f_{cd}}{N_{Ed}}} \Rightarrow \text{Søjlevirkning}$$
$$\lambda = L_s / i, \text{ hvor } i = \sqrt{I / A}$$

Anbefalet E-Eksempel 3.1

2. Centralt belastede søjler

I husbygning kan søjler regnes centralt belastet såfremt:

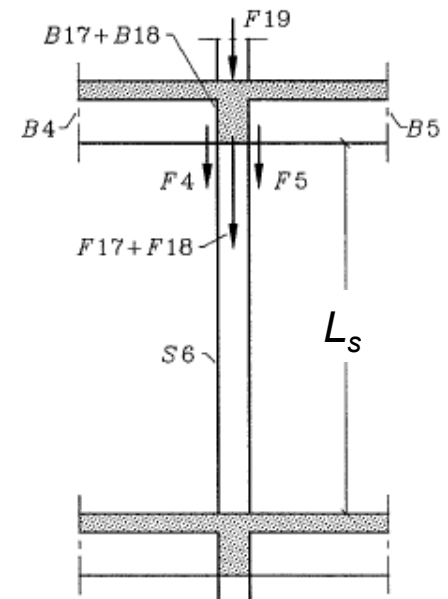
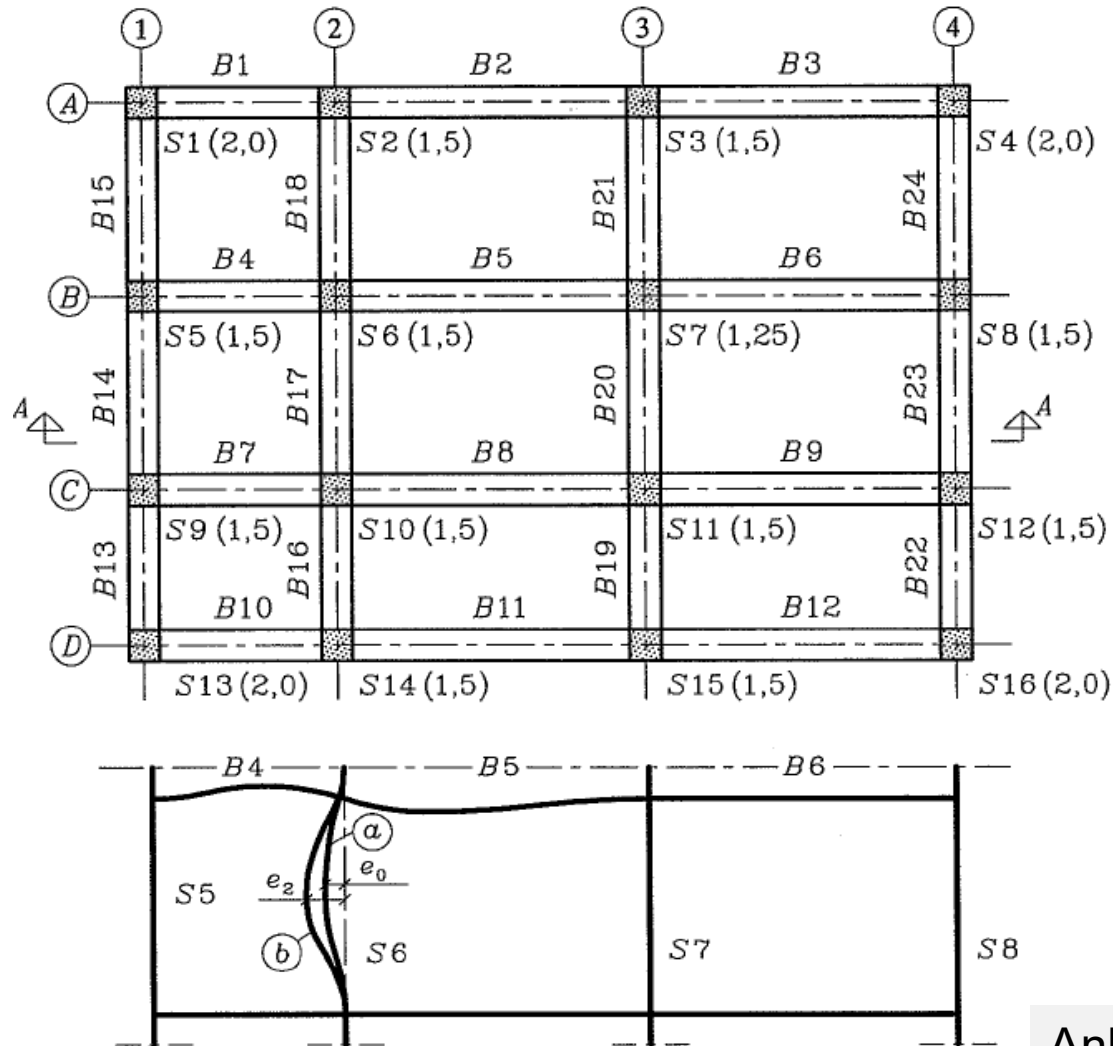
- Konstruktionen har fast knudepunktsfigur
- Søjler er monolitisk sammenstøbt med bjælker/plader
- Slankhedsforholdet $\lambda < 90$, med L_s =søjlelængde

Lasten kan da sættes til $N_{Ed} = N_{\text{øvre}} + cN_{\text{dæk}}$ idet c faktoren sættes til

- 2.0 når søjlen belastes ensidigt i to retninger
- 1.25 når stivheder er tilnærmelsesvis ens i hver retning
- 1.5 øvrige tilfælde

(som vist i figuren på efterfølgende overhead.)

Centralt belastede søjler



Anbefalet E-Eksempel 3.1

3. Forsøg med "uarmertet" normalstyrke beton



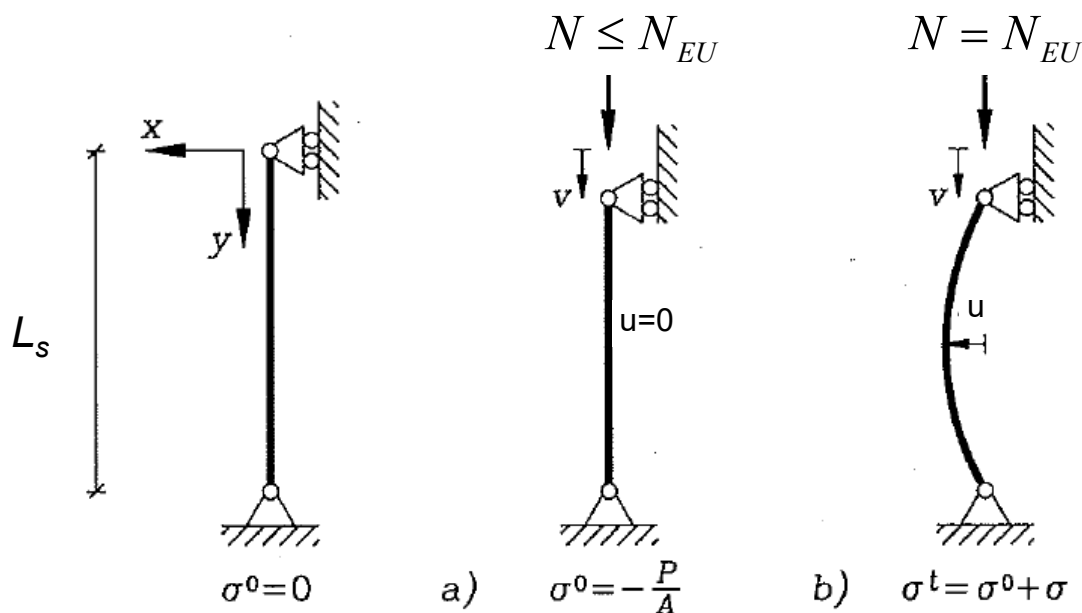
Betonelementet indeholder lidt armering aht. transport og svind – men er underarmert.

Meget skørt (uvarslet) brud ved central belastning.

Youtube: Construct2800Lyngby + "Unreinforced column with central load – brittle failure"

Klassisk teori for centralt belastet søjle

Det klassiske Euler-udtryk gælder for materialer med en lineær arbejdskurve



Eulerlast

$$N_{EU} = \frac{\pi^2 EI}{L_s^2}, \quad \text{inertiradius } i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 EI}{L_s^2 A} = \frac{\pi^2 E}{L_s^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{(L_s / i)^2}$$

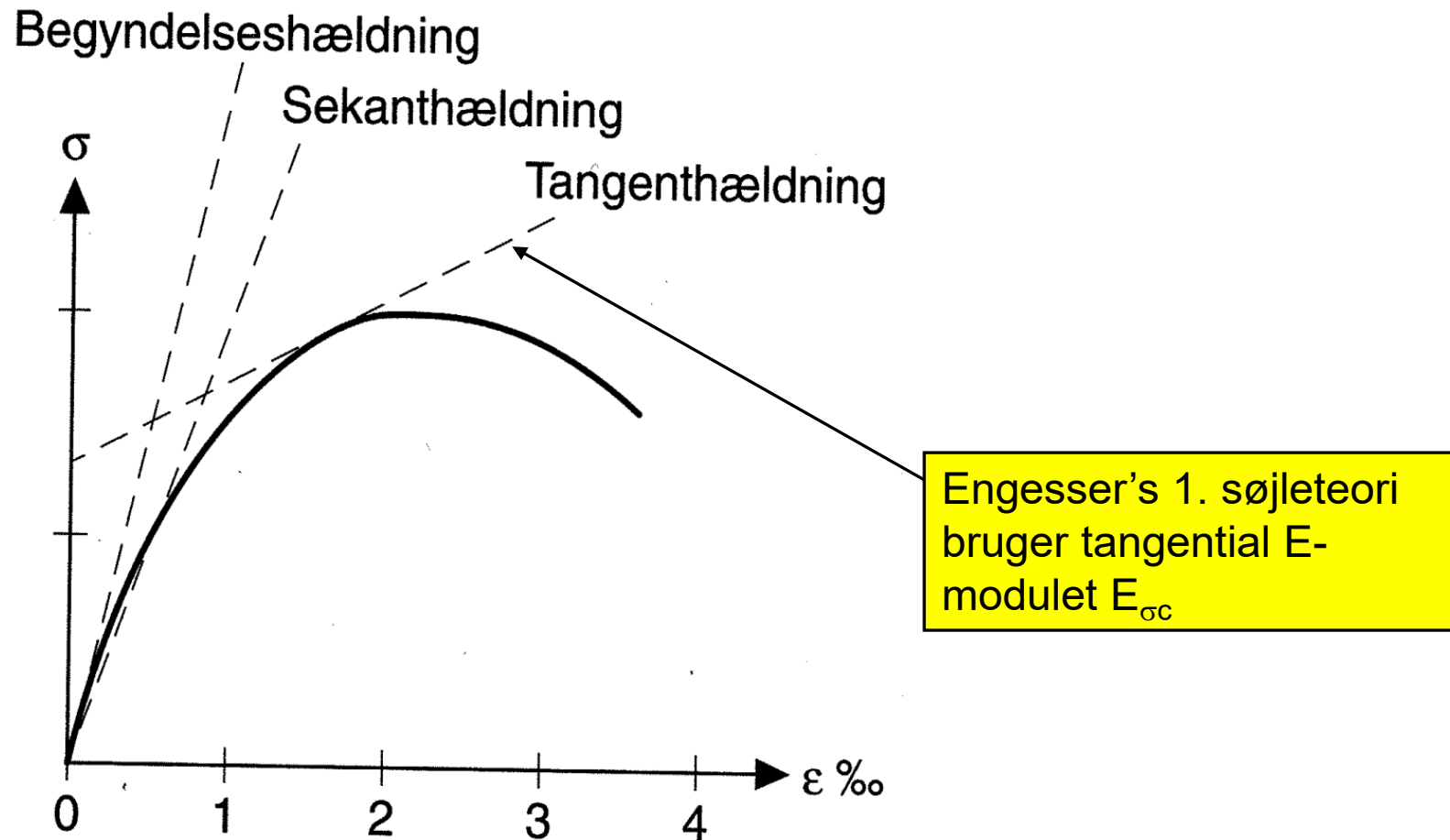
$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \text{søjleslankhed } \lambda = L_s / i$$

NB: Ofte indføres λ som en relativ slankhed

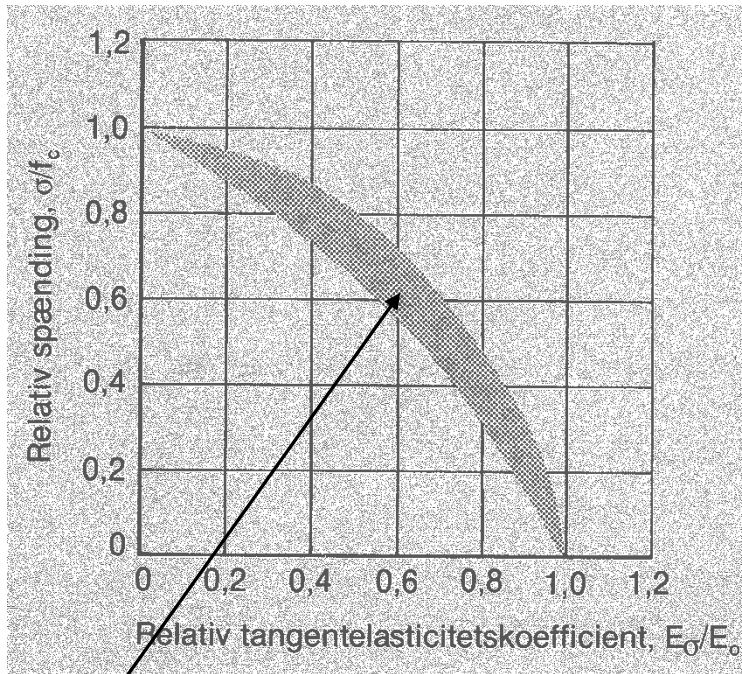
Klassisk søjlestabilitet med 2 mulige ligevægtstilstande

Problem: Hvad gør vi når betonens arbejds-kurve er ulineær ??

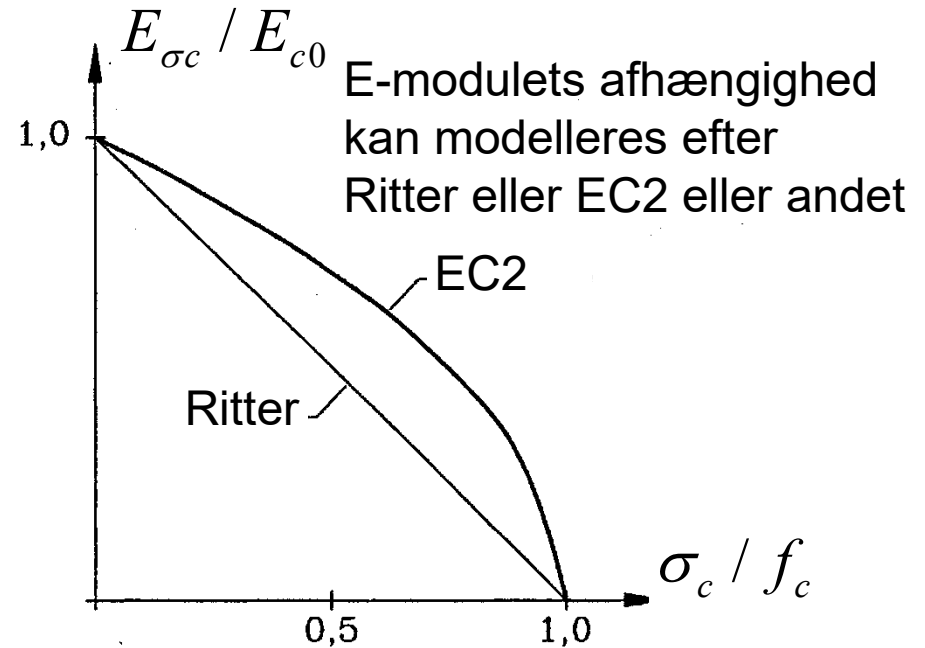
Ulineær arbejdskurve



Tangential E-modul



Betonens tangential E-modul falder med voksende last – ovenfor ses det område, hvor variationerne ligger i



Den konservative Ritter-model af tangential E-modulet vælges

$$E_{\sigma c} = E_{c0}(1 - \sigma_c / f_c)$$

Engessers 1. søjleteori

- Tangent E-modulet E_{crd} indføres i Euler udtrykket

$$N_{crd} = \frac{\pi^2 E_{crd} I_c}{L_s^2} , \quad E_{crd} = E_{0crd} (1 - \sigma_{crd} / f_{cd})$$

$$\sigma_{crd} = \frac{N_{crd}}{A_c} = \frac{\pi^2 E_{crd} I_c}{L_s^2 A_c} = \frac{\pi^2 E_{crd}}{(L_s / i_c)^2} = \frac{\pi^2 E_{crd}}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E_{0crd} (1 - \sigma_{crd} / f_{cd})}{\lambda^2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{crd} = \frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{\pi^2 E_{0crd}} \lambda^2} \quad \text{og} \quad N_{crd} = \sigma_{crd} A_c$$

(Ritter's / Rankin's søjleformel)

Betons begyndelses E -modul

Begyndelses E -modulet er

$$E_{cm} = 22000 \text{ MPa} \cdot \left(\frac{f_{ck} + 8 \text{ MPa}}{10 \text{ MPa}} \right)^{0,3}, \text{ hvor } f_{ck} \text{ skal være karakteristisk værdi}$$

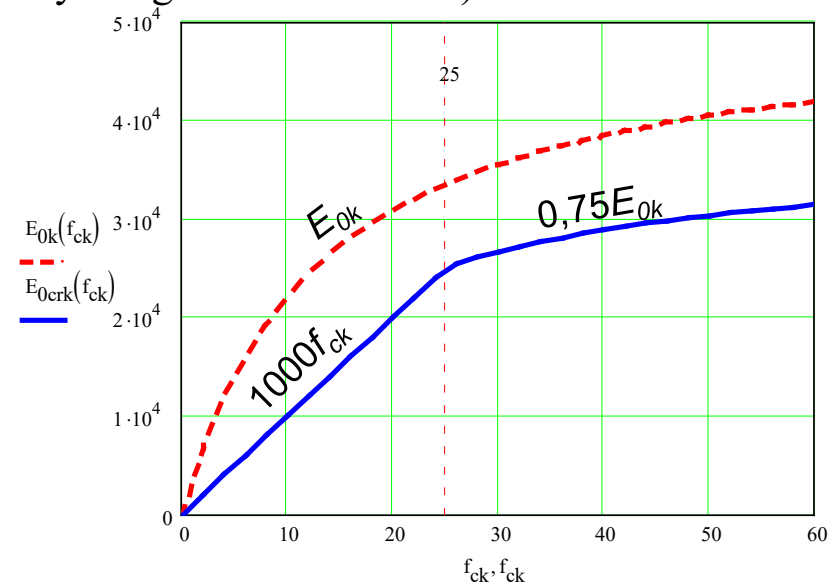
Regningsmæssig værdi findes som:

$$E_{c0d} = \frac{E_{c0m}}{\gamma_c} = \frac{1,05 \cdot E_{cm}}{\gamma_c}$$

Begyndelses E -modulet ved stabilitet (reduceret pga krybning+extra sikkerhed) er derfor

$$E_{0crd} \leq \begin{cases} 1000 f_{cd} \\ 0,75 E_{c0d} \end{cases}$$

Anbefalet E -Eksempel 3.2,
uarmet tværsnit



4. Centralt belastet søjle – med armering

En søjles bæreevne kan naturligvis øges ved anvendelse af armering.

En søjle kan regnes armeret, hvis der er tilstrækkelig længdearmering.

Længdearmeringen er i tryk og kan kun medregnes i søjler, hvis den er fastholdt af bøjler – bøjler skal sidde med passende små mellemrum og skal have en tilstrækkelig styrke.

Der er ikke samme krav for vægge (der er til gengæld normalt en del vandret armering)

EC2 (og andre normer) angiver regler for disse krav.

Forsøg med armeret højstyrke beton



Søjlen buen pænt ud før brud – dvs. godt varsel og masser af deformationskapacitet

Lasten øges til brud

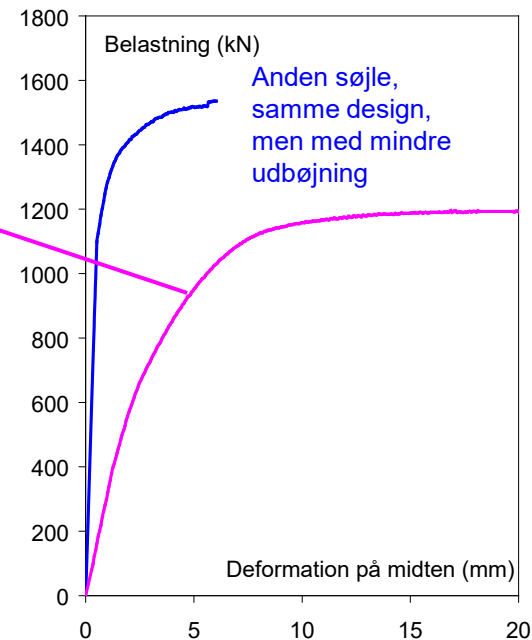


Under bruddet udvikles et "flydeled" (knækket) hvor der sker permanente plastiske deformationer pga. flydning i armeringen

Forsøg med armeret højstyrke beton



Søjlen er armeret og er kun en smule ekscentrisk belastet. Bruddet er derfor temmelig skørt med et beskedent varsel og begrænset udvikling af revner eller udbøjninger før brud.



Youtube: Construct2800Lyngby + "Testing of reinforced, centrally loaded column – ductile failure"

Forsøg med armeret højstyrke beton

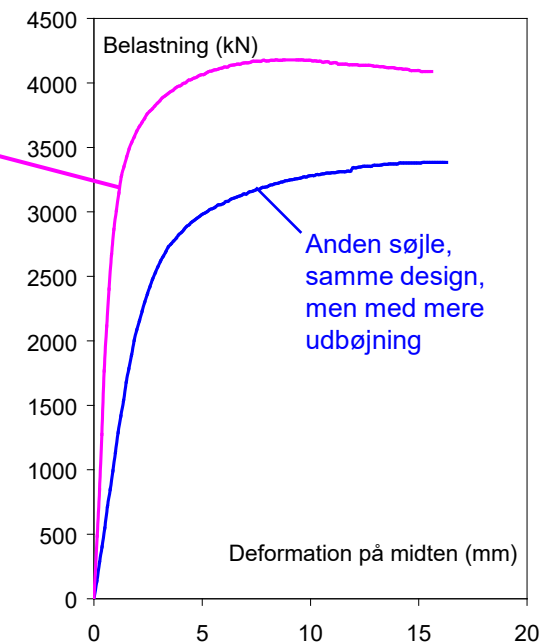


Youtube: Construct2800Lyngby + "Testing of a column with too few stirrups"

Bruddet viser at søjlens armering ikke har nok bøjler.

Søjlen svigter derfor i et stabilitetsbrud i trykarmeringen stænger, der sprænger deres vej ud af siden af søjlen.

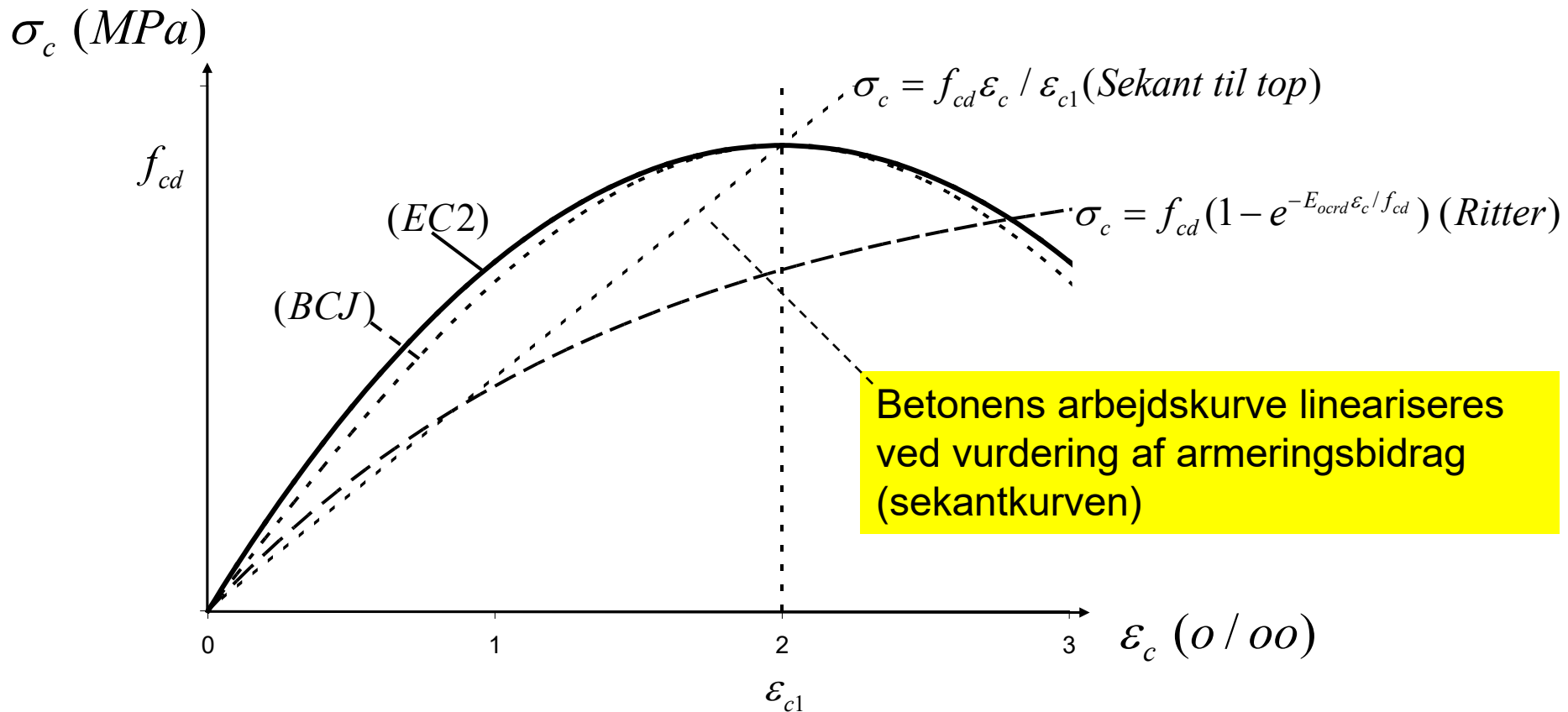
Dette er et meget skørt og uvarslet brud.



Krav til bøjler: Se kapitel 3.2.2.5 + 3.2.2.6

Teori for armeret, centralt belastet søjle

Armeringsstål og beton regnes lineært elastiske – stift plastiske



■ Armeringstøjningen er lig betontøjningen

Ved beregning af betontøjningen benyttes en formel retlinet trykarbejdslinie for betonen med regningsmæssigt elasticitetsmodul på $E_{cd} = f_{cd} / \varepsilon_{c1}$

$$\sigma_{sd} = E_s \varepsilon_s = E_s \varepsilon_{crd} = \alpha \sigma_{crd} \leq f_{yd} \quad \text{da} \quad \alpha = \frac{E_s}{E_c} = \frac{E_s}{f_{cd} / \varepsilon_{c1}}$$

$$N_{crd} = \sigma_{crd} A_c + \sigma_{sc} A_{sc} = \sigma_{crd} A_c + \alpha \sigma_{crd} A_{sc} = \sigma_{crd} A_c (1 + \alpha \rho)$$

$$\text{hvor dog } N_{crd} \leq \sigma_{crd} A_c + f_{yd} A_{sc} \quad \text{og hvor} \quad \rho = \frac{A_{sc}}{A_c}$$

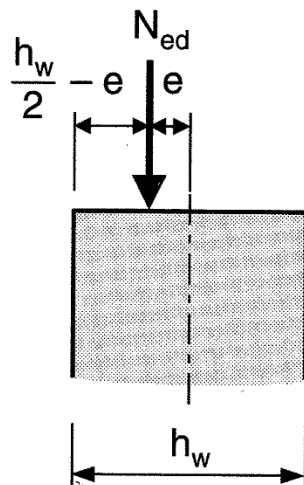
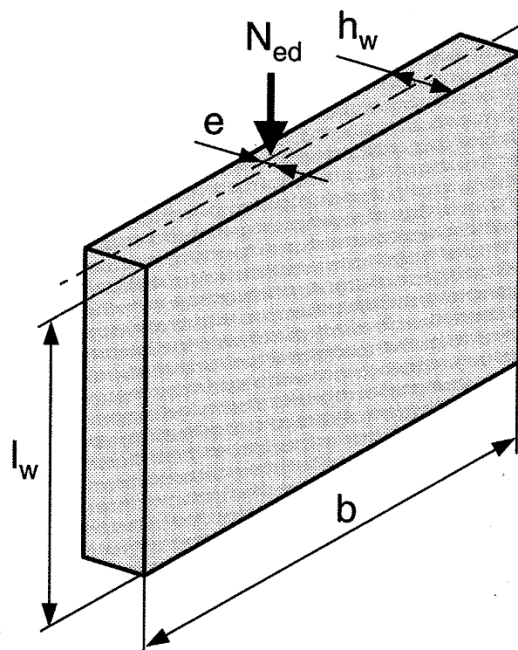
Tilnærmet hensyntagen til armeringen

$$N_{crd} \leq \begin{cases} \sigma_{crd} A_c (1 + \alpha \rho) & \text{lineært elastisk armering } \varepsilon_s < \varepsilon_y \\ \sigma_{crd} A_c + f_{yd} A_{sc} & \text{flydning i armeringen } \varepsilon_s \geq \varepsilon_y \\ \sigma_{crd} A_c (1 + 0,04 \alpha) & A_s \text{ regnes max til } 0,04 A_c \text{ (EC2)} \end{cases}$$

f_{ck} MPa	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90
$\frac{10^4 f_{cd}}{\pi^2 E_{0crd}}$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,2	2,4	2,7
α	26	23	20	18	16	15	14	13	12	12	11	10	9	8

Anbefalet E-Eksempel 3.2

5. Uarmerede, excentrisk belastede søjler



$$N_{Rd} = b h_w f_{cd} \Phi$$

$$\Phi \leq \begin{cases} 1,14 \left(1 - 2 \frac{e}{h_w} \right) - 0,02 \frac{L_w}{h_w} \\ 1 - 2 \frac{e}{h_w} \end{cases}$$

Metoden er delvist empirisk.

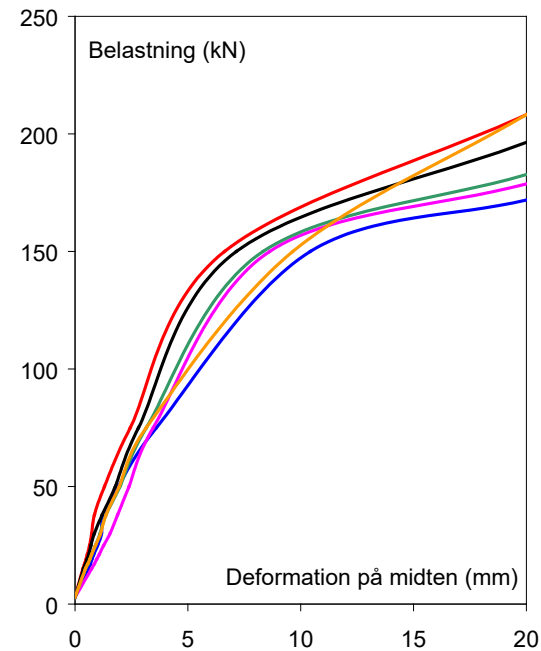
Metoden gælder for en søjle eller væg med rektangulært tværsnit.

Forsøg med "uarmeret" letvægtsbeton

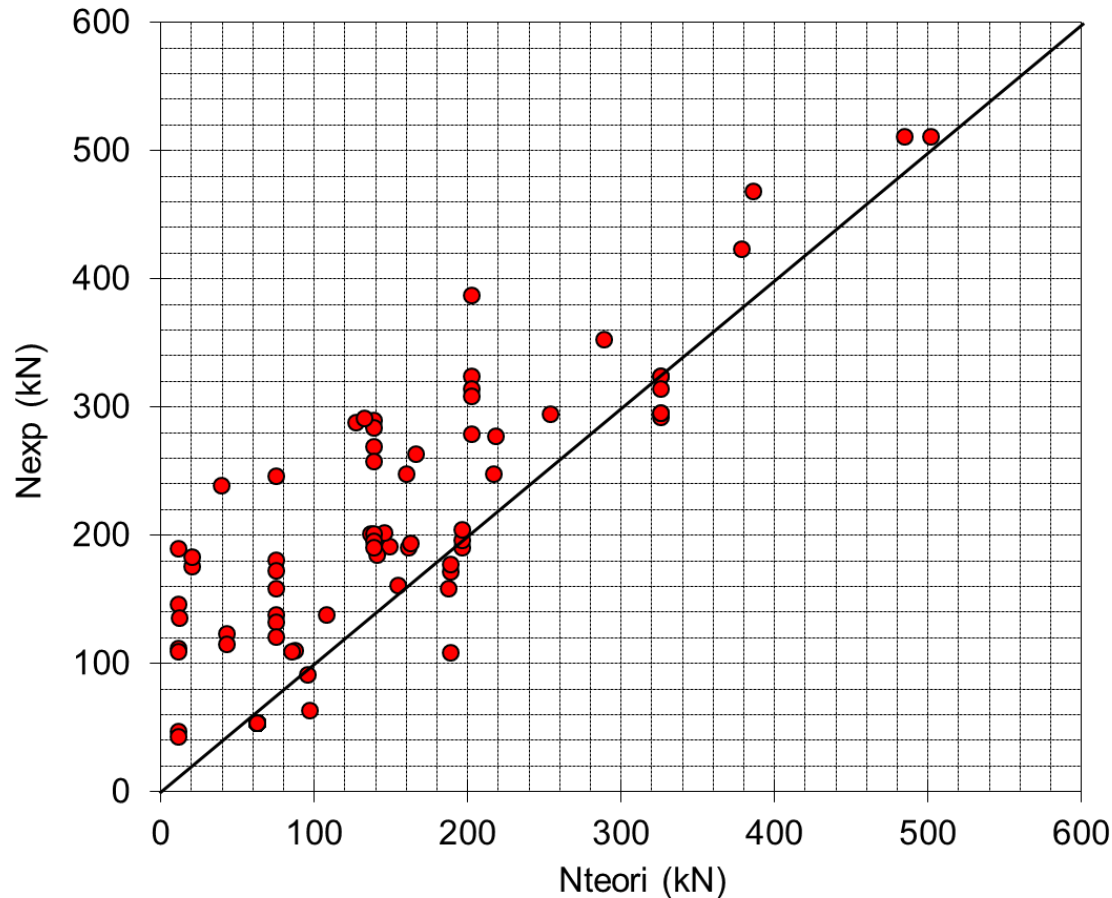


Betonelementet indeholder lidt armering aht. transport og svind – men er under armeret.

Der gives et vist varsel (udbøjning) ved ekcentrisk belastning.

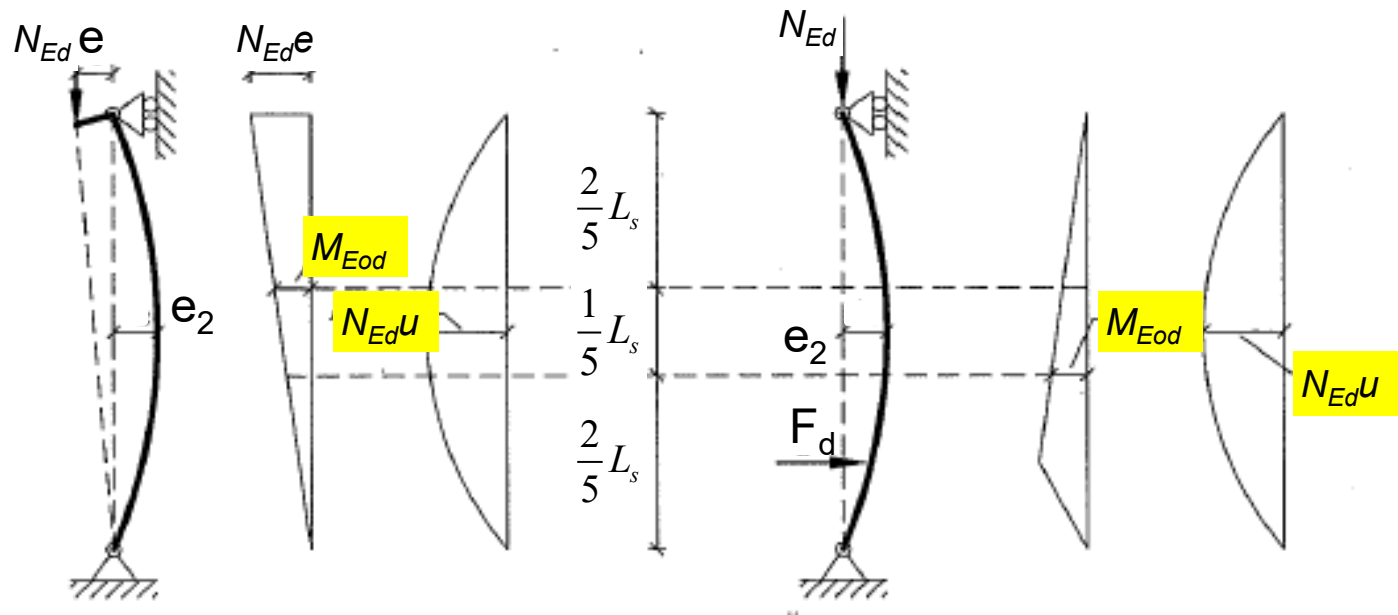


Sikkerhed i uarmeret væg, middelstyrke



Modellen er konservativ –
og giver IKKE mulighed for
at tage armering i regning

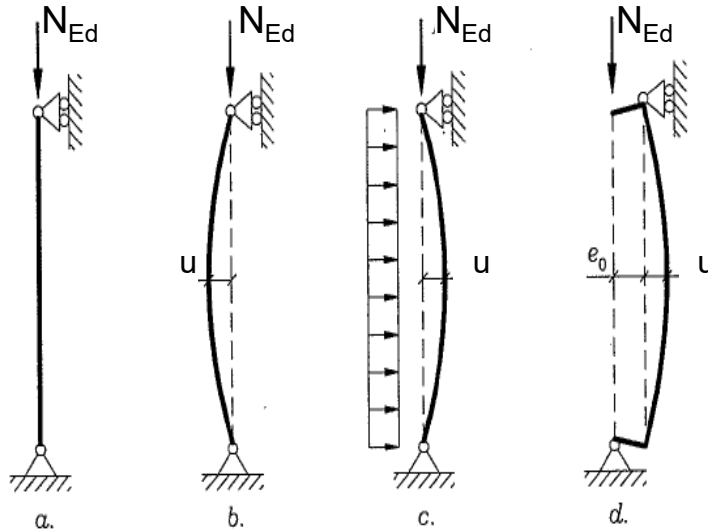
6.Excentrisk og tværbelastede søjler



Bjælkesøjle med excentrisk last

Bjælkesøjle med vandret last

Excentrisk og tværbelastede søjler



1. ordensmomentet (uden udbøjning):

$$M_{E0d} = M_{tv} + N_{Ed} (e_0 + e_1)$$

2. ordensmomentet (inkl. udbøjningsbidrag):

$$M_{Ed} = M_{E0d} + N_{Ed} u$$

M_{tv} er momentet fra tværlasten

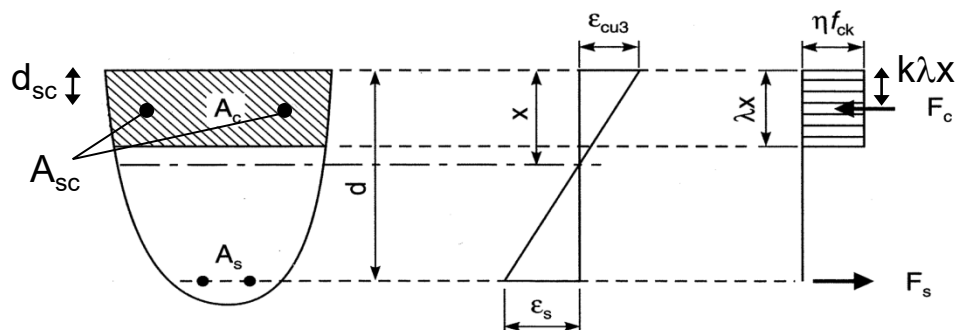
e_0 er normalkraftens excentricitet

e_1 er afvigelser fra planhed

u er udbøjningen – hvis vi kender den

så er alt som for tværsnit med moment og normalkraft !!!

Simpelt udbøjningsestimat



Når tværsnittet er revnet, kan udbøjningen u på den sikre side indledningsvis gættes til

$$u = \frac{1}{10} \kappa_{bal} L_s^2 = \frac{1}{10} \frac{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}}{d} L_s^2 \quad \text{idet } \kappa < \kappa_{bal} \text{ for } \varepsilon_c < \varepsilon_{cu3} \text{ og } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd}.$$

Tøjningerne er ε_{cu3} (normalt=0,35%) og $\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_{sk}$

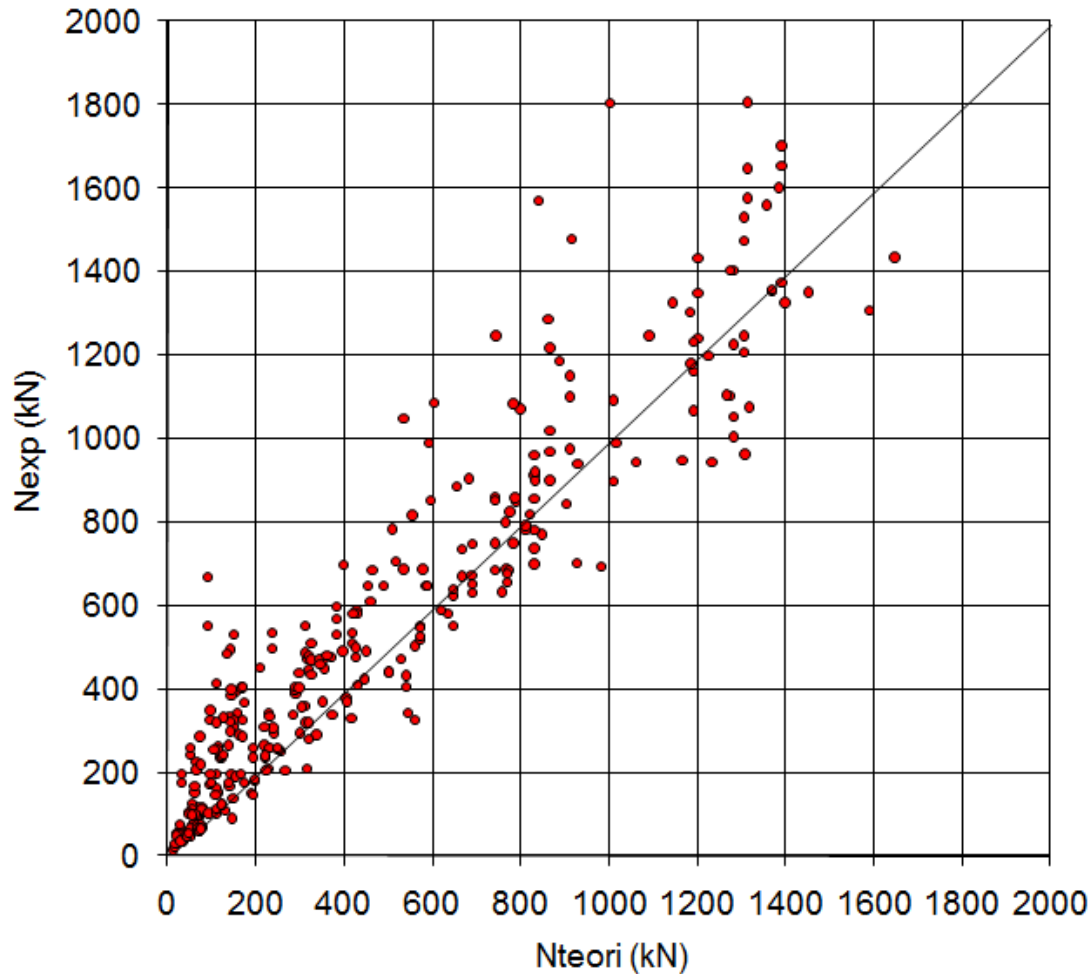
Momentet M_{Ed} kan nu bestemmes ved udtrykket:

$$M_{Ed} = M_{E0d} + N_{Ed} u$$

Mere detaljerede og komplicerede estimater kan naturligvis også anvendes ...

Anbefalet E-Eksempel 3.3

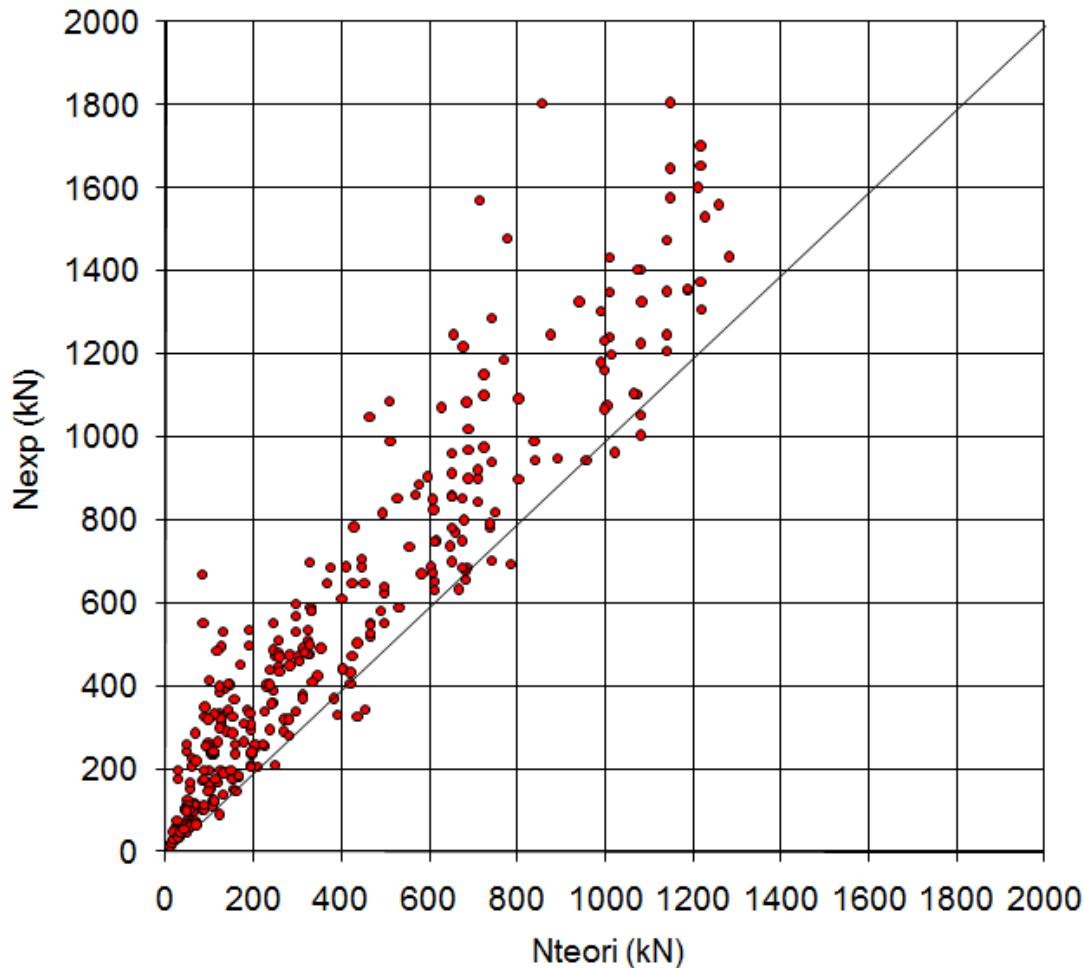
Sikkerhed i U-estimat, middelstyrker



Bæreevne ved simpelt udbøjningsgæt:
Forsøg versus teori ved brug af
middelstyrker – beregningerne er på
den sikre side i snit.

$$u = \frac{1}{10} \kappa_{\text{bal}} L_s^2 = \frac{1}{10} \frac{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}}{d} L_s^2$$

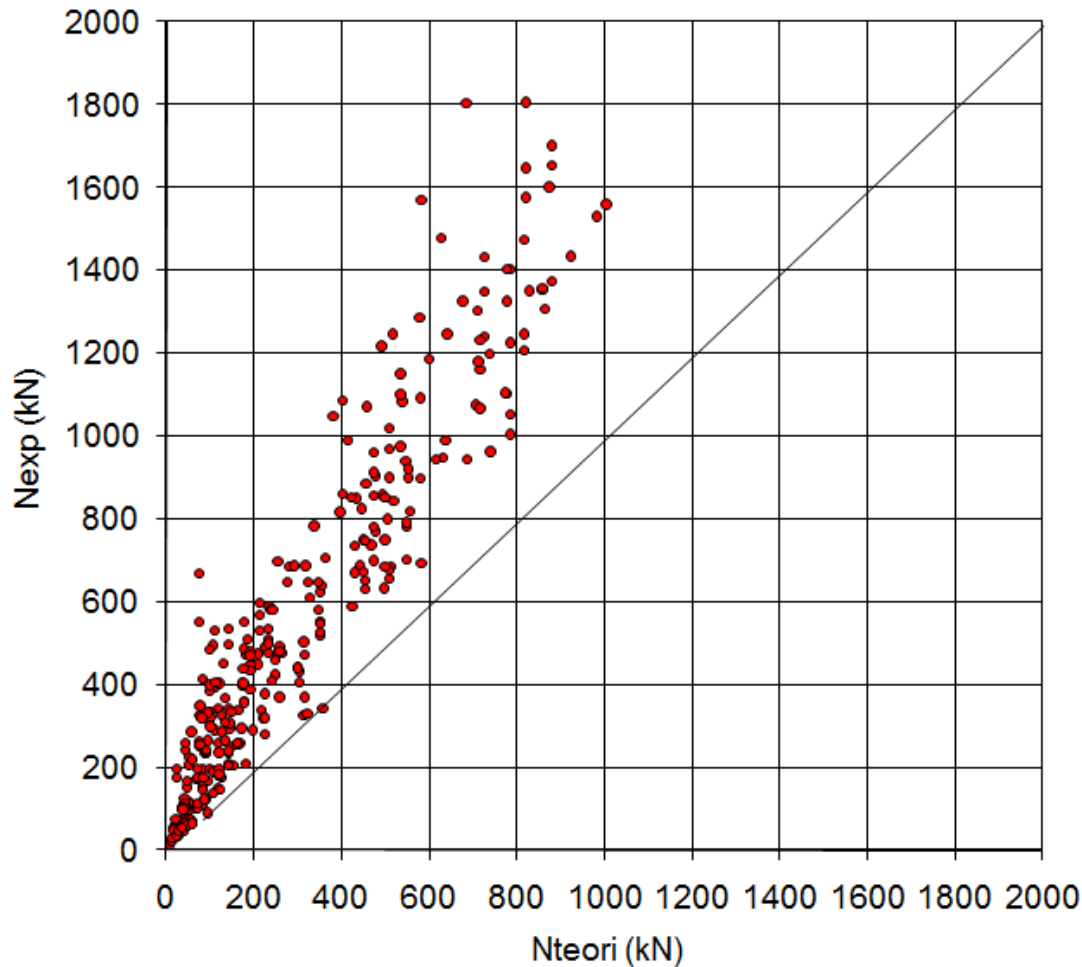
Sikkerhed i U-estimat, karakteristiske styrker



Bæreevne ved simpelt udbøjningsgæt:
Forsøg versus teori ved brug af
karakteristiske styrker –
beregningerne er på den sikre side i de
fleste tilfælde.

$$u = \frac{1}{10} \kappa_{bal} L_s^2 = \frac{1}{10} \frac{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}}{d} L_s^2$$

Sikkerhed i U-estimat, regningsmæssige styrker



Bæreevne ved simpelt udbøjningsgæt:
Forsøg versus teori ved brug af
regningsmæssige styrker –
beregningerne er på den sikre side i
alle tilfælde.

**Der kan laves mere detaljerede
beregninger** med krumme
arbejdskurver for betonen og for
armeringen, ligesom udbøjningen kan
bestemmes mere detaljeret.

Det kan øge bæreevnen med 10-20 % i
snit – men varierer en del.

$$u = \frac{1}{10} \kappa_{bal} L_s^2 = \frac{1}{10} \frac{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}}{d} L_s^2$$

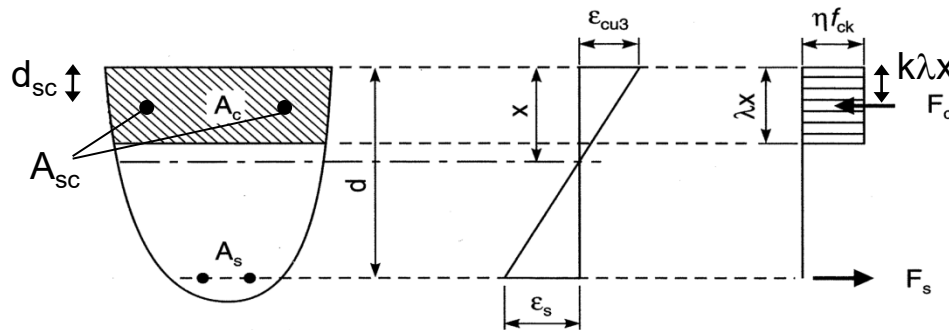
Køreplan for beregninger

- A. Beregn alle materialeparametre
 - B. Beregn $M_{E_{od}}$ (moment uden udbøjning)
 - C. Beregn udbøjningen (u også kaldet e_2)
 - D. Beregn M_{Ed} (moment med udbøjning)
 - E. Eftervis bæreevnen at tværsnit (N_{Ed} , M_{Ed})
-

Der er nu 3 muligheder for at eftervis tværsnittets bæreevne overfor lasten $N_{Ed} + M_{Ed}$:

1. Løse ligningerne efter at have bestemt om der er flydning i trykarmering og/eller i trækarmring
 2. Iterere for at finde nul-liniens placering (x)
 3. Anvende M-N diagram
- som ved bjælker med moment og normallast !

Metode 1+2: Ligningerne og iteration



$$\begin{aligned}
 N_{Rd} &= F_c + F_{sc} - F_s \\
 &= A_c(x)\eta f_{cd} + A_{sc}\sigma_{sc} - A_s\sigma_s \\
 M_{Rd} &= F_c(0,5h - k\lambda x) + \\
 &A_{sc}\sigma_{sc}(0,5h - d_{sc}) + A_s\sigma_s(d - 0,5h)
 \end{aligned}$$

Tøjningerne i armeringen er

$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \varepsilon_{cu3} \text{ og } \varepsilon_{sc} = \frac{x - d_{sc}}{x} \varepsilon_{cu3}$$

Spændingerne i armeringen er derfor

$$\begin{aligned}
 \sigma_s &= \begin{cases} f_{yd} & \text{for } \varepsilon_{uk} \geq \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \\ E_{sd}\varepsilon_s & \text{for } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \end{cases} \\
 \sigma_{sc} &= \begin{cases} f_{yd} & \text{for } \varepsilon_{uk} \geq \varepsilon_{sc} \geq \varepsilon_{yd} \\ E_{sd}\varepsilon_{sc} & \text{for } \varepsilon_{sc} < \varepsilon_{yd} \end{cases}
 \end{aligned}$$

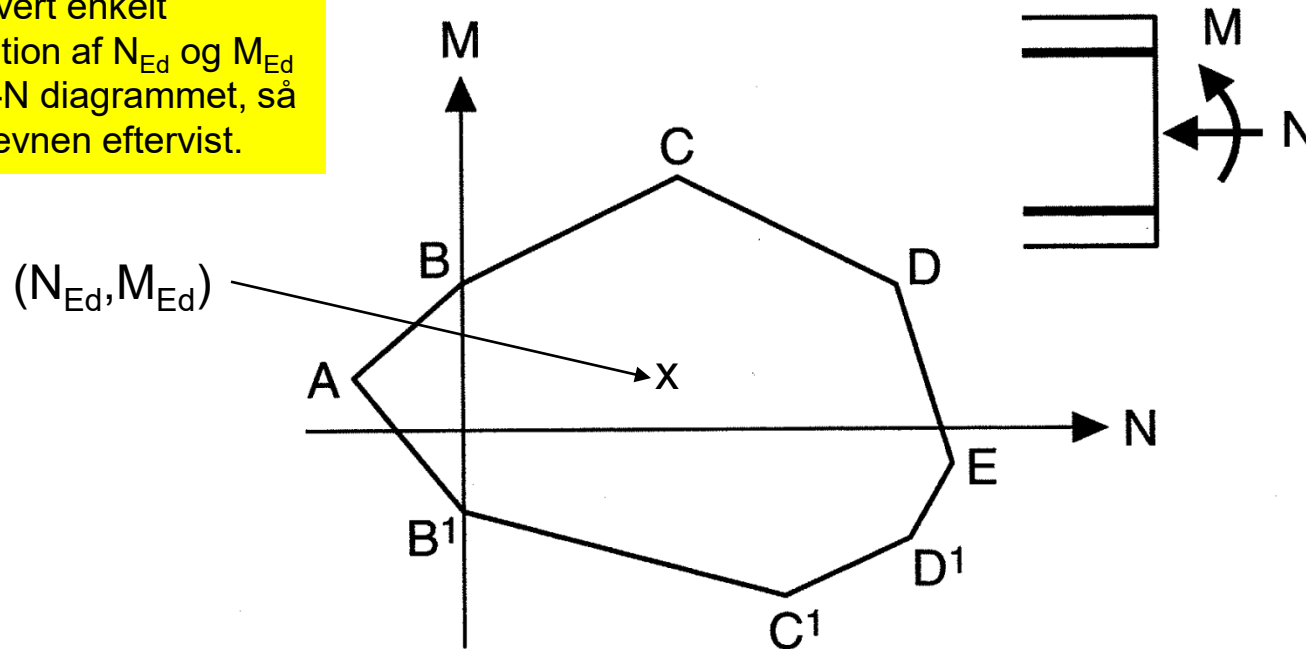
Brug iteration (Excel eller lommeregnerens spread sheetfunktion er MEGET velegnet til den slags) eller løs ligningerne (SVÆRT) ... eller lav M-N diagrammer

Anbefalet E-Eksempel 3.4 (simpel håndregning) og 3.5 (iteration)

Metode 3: M-N Diagram

I projektering med **mange** forskellige belastninger kan det ofte betale sig at opstille et M-N diagram.

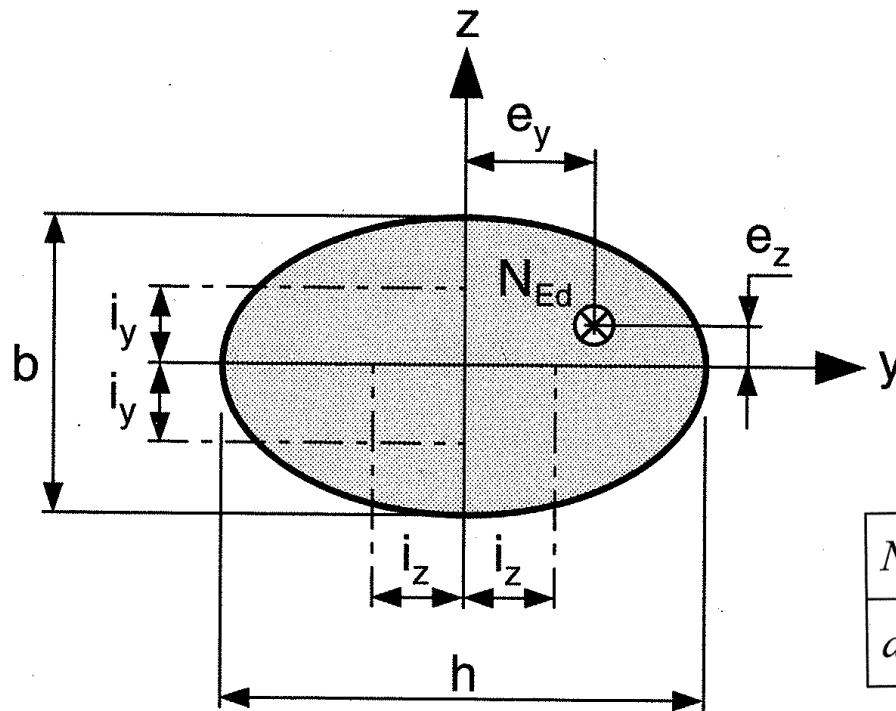
Ligger hvert enkelt kombination af N_{Ed} og M_{Ed} inde i M-N diagrammet, så er bæreevnen eftervist.



Anbefalet E-Eksempel 3.6

7. Biaxial Bøjning

Ved bøjning om to akser samtidig **kombineres** udnyttelsen om de to akser



$$\left(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left(\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1,0$$

N_{Ed}/N_{Rd}	0,1	0,7	1,0
a	1,0	1,5	2,0

$$N_{Rd} = A_c f_{cd} + A_s f_{yd}$$

De to bøjende påvirkning kan dog betragtes **hver for sig** hvis

$$0,5 \leq \lambda_y / \lambda_z < 2,0$$

og en af følgende to betingelser er opfyldt

$$\frac{e_y / h_{eq}}{e_z / b_{eq}} \leq 0,2 \quad \frac{e_z / b_{eq}}{e_y / h_{eq}} \leq 0,2$$

De ækvivalente højder og bredder i et ikke-rektangulært tværsnit findes som

$$b_{eq} = i_y \sqrt{12}$$

$$h_{eq} = i_z \sqrt{12}$$